# Resumen Teorico De Algebra Lineal

Matematicas 2 - Algebra Lineal para Fisicos

**Ezequiel Remus**

Algebra Lineal

ezequielremus@gmail.com

29 de octubre de 2022

# Índice general

# I Espacios Vectotiales

## I.I. Espacios Vectoriales

Definición: (**Espacio Vectorial**)

Dado un cuerpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$. Entonces, un conjunto $\mathbb{V} \neq \varnothing$. Se dice que $(\vec{V}, +, \cdot)$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial sin se cumple que, para $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{V}$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$: Suma :

- Conmutativo : $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$
- Asociativo : $\vec{v} + (\vec{w} + \vec{u}) = (\vec{v} + \vec{w}) + \vec{u}$
- Existencia del Elemento Neutro : $\exists\, \vec{0} : \vec{v} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v} = \vec{v} \ , \ \forall\, \vec{v} \in \mathbb{V}$
- Existencia del Inverso Aditivo : $\forall \vec{v} \in \mathbb{V}, \exists!\, -\vec{v} \in \mathbb{V} \,/\, \vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$, donde $\vec{0}$ es el Elemento Neutro de $\mathbb{V}$

Producto por Escalar :

- Existencia del Elemento Neutro : $\exists\, 1 \in \mathbb{K} \,/\, 1 \cdot \vec{v} = \vec{v}, \forall \vec{v} \in \mathbb{V}$
- Asociatividad de Escalares : $(\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{v} = \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{v})$
- Distributividad Respecto Suma de Escalares : $\vec{v} \cdot (\lambda + \mu) = \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{v}$
- Distributividad Respecto Suma de Escalares : $\lambda \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \lambda \cdot \vec{v} + \lambda \cdot \vec{w}$

Definición: (**Combinación Lineal**)

Un vector $\vec{v}$ de $\mathbb{V}$ se dice **Combinacion Lineal** de los vectores $\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n$ de $\mathbb{V}$, si existen escalares $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ de $\mathbb{K}$ que cumplen que:

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \vec{u}_i$$

### I.I.I. Generadores

Definición: (**Sistema de Generadores**)

Sea $\mathbb{V}$ es un $\mathbb{K}$-E.V. y $\mathbb{G} \subseteq \mathbb{V}$, entonces $\mathbb{G}$ es un generador de $\mathbb{V}$, y lo notamos $\langle \mathbb{G} \rangle = \mathbb{V}$ si todo elemento de $\mathbb{V}$ es una combinación lineal de $\mathbb{G}$

Observación: Notemos que esto es lo mismo que decir que, si tengo un par de vectores de $\mathbb{V}$ que al sumar multiplos de estos siempre me dan un vector que vive en $\mathbb{V}$, entonces, a partir de esos dos vectores puedo obtener cualquier vector del espacio vectorial $\mathbb{V}$. Además, sabemos que esos vectores forman un subespacio de $\mathbb{V}$ pues estan dentro de $\mathbb{V}$.

Definición: Dado $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{V}$, vamos a considerar:

$$\langle \mathbb{S} \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \vec{v}_i \ : \ n \in \mathbb{N} \ , \ \vec{v}_i \in \mathbb{S} \ , \ \lambda_i \in \mathbb{K} \right\}$$

## I.2. Subespacios

Definición: (**Subespacio**)

Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-E.V. Entonces, un subespacio $\mathbb{W}$ en $\mathbb{V}$ es un subconjunto de $\mathbb{V}$ (Es decir, $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{V}$) si cumple que:

- $0 \in W$
- $\vec{v}, \vec{v} \in \mathbb{W} \ \Rightarrow \ \vec{v} + \vec{v} \in \mathbb{W}$

- $\lambda \in \mathbb{K}, \vec{v} \in \mathbb{W}$

**Teorema:** $(\mathbb{S} \cap \mathbb{T} \subset \mathbb{V})$
Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. La intersección de cualquier coleccion de subespacios de $\mathbb{V}$ es un subespacio de $\mathbb{V}$.

**Observación:** $(\mathbb{S} \cup \mathbb{T} \nsubseteq \mathbb{V})$
Si $\mathbb{V}$ es un $\mathbb{K}$-E.V. y $\mathbb{S} \wedge \mathbb{T}$ son subespacios de $\mathbb{V}$, entónces $\mathbb{S} \cup \mathbb{T}$ no es necesariamente un subespacio de $\mathbb{V}$.

**Observación:** Si $\langle \mathbb{S} \cup \mathbb{T} \rangle$ es un subespacio de $\mathbb{V}$ y es el menor subespacio de $\mathbb{V}$ que contiene a ambos ($\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$), en general, si $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$ son subespacios de $\mathbb{V}$, entonces definimos:

$$\mathbb{S} + \mathbb{T} = \{\vec{v} + \vec{w} : \vec{v} \in \mathbb{S}\ y\ \vec{w} \in \mathbb{T}\}$$

Resulta que $\mathbb{S} + \mathbb{T}$ es un subespacio de $\mathbb{V}$ y además $\mathbb{S} + \mathbb{T} = \langle \mathbb{S} \cup \mathbb{T} \rangle$

**Definición:** Decimos que $\mathbb{V} = \mathbb{S} \oplus \mathbb{T}$ es la Suma Directa, si se verifica:

1. $\mathbb{V} = \mathbb{S} + \mathbb{T}$, es decir, $\vec{v} \in \mathbb{V}, \vec{s} \in \mathbb{S}, \vec{t} \in \mathbb{T} \;\Rightarrow\; \vec{v} = \vec{s} + \vec{t}\,,\ \forall\, \vec{v}$
2. $\mathbb{S} \cap \mathbb{T} = \{0_{\mathbb{V}}\}$

## 1.3. Bases y Dimensiones

**Definición:** (**Dependencia Lineal**)
Si $\mathbb{V}$ es un $\mathbb{K}$-E.V. Un subconjunto $\mathbb{S}$ de $\mathbb{V}$ se dice Linealmente Dependiente, si existen vectores distintos $\vec{v}_1, \cdots \vec{v}_n$ de $\mathbb{S}$ y escalares $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ (no todos nulos) de $\mathbb{K}$, tales que:

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \vec{v}_i$$

Luego, se dice que los vectores son Linealmente Independiente, si:

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \vec{v}_i \;\Rightarrow\; \lambda_i = 0, \quad \forall\ i \in [1, n]$$

**Definición:** Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-ev y $B \subseteq \mathbb{V}$. Decimos que $B$ es una base de $\mathbb{V}$ si:

1. $\mathbb{V} = \langle B \rangle$
2. $B$ es linealmente independiente

**Proposición:** $B$ es base de $\mathbb{V} \;\Leftrightarrow\;$ todo vector $\vec{v} \in \mathbb{V}$ puede escribirse de manera única como combinación lineal de elementos de $B$.

**Proposición:** Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-ev supongamos que $\mathbb{V} = \langle \vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_r \rangle$ y que $\{\vec{w}_1, \cdots, \vec{w}_s\} \subseteq \mathbb{V}$ es un conjunto linealmente, entonces resulta que $s \leq r$

**Teorema:** Si $\mathbb{V}$ tiene una base finita, entonces toda otra base de $\mathbb{V}$ es finita y tiene $n$ elementos.

**Definición:** Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-ev. Si $B = \{\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n\}$ es base de $\mathbb{V}$, decimos que $\mathbb{V}$ tiene dimensión $n$ y lo notamos $dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) = n$.

**Teorema:** Todo espacio vectorial $\neq \varnothing$ tiene una base.

**Proposición:** Dado $\{\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_s\} = X$ tal que $\langle X \rangle = \mathbb{V}$ entonces $Y \subseteq X$ tal que $Y = B_X$

**Proposición:** Dado $\{\vec{w}_1, \cdots, \vec{w}_s\} = X$ tal que $X \subseteq \mathbb{V}$ tal que estos son linealmente independiente, entonces existen vectores $\vec{w}_{s+1}, \cdots, \vec{w}_n$ en $\mathbb{V}$ tal que $\{\vec{w}_1, \cdots, \vec{w}_s, \vec{w}_{s+1}, \cdots, \vec{w}_n\}$ es base de $\mathbb{V}$.

**Proposición:** Dado $\mathbb{V}$ donde $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$ son subespacios de $\mathbb{V}$, supongamos que $\mathbb{V}$ es de dimensión finita. Entonces:

1. $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{T} \;\Rightarrow\; dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{S}) \leq dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{T})$

2. $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{T}$ y $dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{S}) = dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{T}) \Rightarrow \mathbb{S} = \mathbb{T}$

Teorema: (**Teorema de la dimensión**)
Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-ev y sean $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$ subespacio de dimensión finita, entonces:

$$dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{S} + \mathbb{T}) = dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{S}) + dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{T}) - dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{S} \cap \mathbb{T})$$

# 2 Transformaciones Lineales

## 2.1. Transformaciones Lineales

**Definición:** (**Transformación Lineal**)
Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ dos $\mathbb{K}$- E.V. y $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$. Se dice que $f$ es una Transformación Lineal (t.l.), si $\forall\ \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{V}, \lambda \in \mathbb{K}$:

1. $f(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = f(\vec{v}_1) + f(\vec{v}_2)$
2. $f(\lambda \cdot \vec{v}_1) = \lambda \cdot f(\vec{v}_1)$

**Observación:** Si $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ es t.l, entonces $f(0_{\mathbb{V}}) = 0_{\mathbb{W}}$, ya que:

$$f(0_{\mathbb{V}}) = f(0 \cdot 0_{\mathbb{V}}) = 0 \cdot f(0_{\mathbb{V}}) = 0_{\mathbb{W}}$$

**Proposición:** Dada $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$, t.l vale lo siguiente.

1. Si $\mathbb{S}$ es un subespacio de $\mathbb{V}$ $\Rightarrow$ $f(\mathbb{S})$ es subespacio de $\mathbb{W}$.
2. SI $\mathbb{T}$ es un subespacio de $\mathbb{W}$ $\Rightarrow$ $f^{-1}(\mathbb{T})$ es subespacio de $\mathbb{V}$.

**Proposición:** Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ dos $\mathbb{K}$- E.V. y supongamos que $dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) = n$. Sean $\{v_1, \cdots, v_n\}$ una base de $\mathbb{V}$ y $\{w_1, \cdots, w_n\} \subseteq \mathbb{W}$, entonces existe una única transformación lineal $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ tal que:

$$f(v_i) = w_i \ , \forall \ \ i, 1 \leq i \leq n$$

**Definición:** (**Monomorfismo y Epimorfismo**)

1. Sea $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación lineal. Decimos que $f$ es un Epimorfismo si es sobreyectiva, es decir si $Im(f) = \mathbb{W}$
2. Sea $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación lineal. Decimos que $f$ es un Monomorfismo si $f$ es Inyectiva, es decir, si $f(\vec{v}_1) = f(\vec{v}_2) \ \Rightarrow \ \vec{v}_1 = \vec{v}_2, \forall\, \vec{v} \in \mathbb{V}$.

**Observación:** Dada $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ las dos condiciones siguientes son equivalentes:

1. $f$ es Monomorfismo.
2. Si $f(\vec{v}) = \vec{0}_{\mathbb{W}} \ \Rightarrow \ \vec{v} = \vec{0}_{\mathbb{V}}$

**Definición:** (**Isomorfismo**) Sea $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ t.l Decimos que $f$ es un Isomorfismo si es un epimorfismo y a su vez monomorfismo.

**Definición:** (**Núcleo**) Sea $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ t.l El Núcleo de $f$ se define como:

$$Nu(f) = Ker(f) = \{\vec{v} \in \mathbb{V} / f(\vec{v}) = \vec{0}_{\mathbb{W}}\} = f^{-1}(\{\vec{0}_{\mathbb{W}}\})$$

**Observación:** $f$ monomorfismo $\Leftrightarrow$ $Ker(f) = \{\vec{0}_{\mathbb{V}}\}$

**Proposición:** Sea $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$, t.l. Entonces:

1. Si $X$ es un conjunto de generadores de $\mathbb{V}$, entonces $f(x)$ es un conjunto de generadores de $Im(f)$.
2. Si $X \subseteq \mathbb{V}$ es l.i. y $f$ es un monomorfismo, entonces $f(x)$ es un conjunto l.i. de $\mathbb{W}$.

**Corolario:** Si $B$ es base de $\mathbb{V}$, entonces $f$ monomorfismo $\Rightarrow$ $f(B)$ es una base de $Im(f)$

**Corolario:** Si $f$ es un isomorfismo, entonces $f$ manda bases de $\mathbb{V}$ en bases de $\mathbb{W}$.

**Teorema:** (**Teorema de Dimensión**) Sean $\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$ dos $\mathbb{K}$- E.V. , $\mathbb{V}$ de dimension finita y sea $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$, t.l. vale la siguiente formula:

$$dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) = dim_{\mathbb{K}}(Ker(f)) + dim_{\mathbb{K}}(Im(f))$$

**Corolario:** Sea $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ dos $\mathbb{K}$-E.V. de dimensin finita $n$ son equivalentes:

1. $f$ es Isomorfismo
2. $f$ es Epimorfismo
3. $f$ es Monomorfismo

## 2.2. Matriz de Una Transformación Lineal

**Definición:** (Cambio De Base)
Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-E.V. de dimension finita $n$ y sea una base $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ una base ordenada de $\mathbb{V}$. Dado un vector $\vec{v} \in \mathbb{V}$, sabemos que $\exists\, \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K} \,/\, \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot v_i$ .

Decimos que $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ son coordenadas de $\vec{v}$ en base $B$ y escribimos $[v]_B = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$

**Observación:** Si $dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) = n$ y $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ es una base ordenada de $\mathbb{V}$, podemos definir la t.l. $\phi : \mathbb{V} \to \mathbb{K}^n$ como sigue: $\phi(v_i) = e_i$, $1 \le i \le n$. Es facil ver que $\phi$ es un isomorfismo porque manda una base en una base.

**Definición:** Se llama matriz de $f$ en las bases $B_1$, $B_2$ a

$$[f]_{B_1 B_2} = (\alpha_{ij}) \;\; 1 \le i, j \le n$$

Ahora, si $B_1 = B_2 \Rightarrow [f]_{B_1 B_2} = [f]_{B_1}$

**Proposición:** Sean $\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$ dos $\mathbb{K}$-E.V. de dimensión finita con bases $B_1$, $B_2$. Sea $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una t.l. $\forall\, v \in \mathbb{V}$ vale

$$[f]_{B_1, B_2} \cdot [\vec{v}]_{B_1} = [f(\vec{v})]_{B_2}$$

**Observación:** Dados tres espacios vectoriales $\mathbb{U}$, $\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$ y $f : \mathbb{U} \to \mathbb{V}$ t.l. y $g : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$, t.l. la composición $g \circ f : \mathbb{U} \to \mathbb{W}$ tambien es una t.l.

Si además, $dim\mathbb{U} = r$, $dim\mathbb{V} = n$, $dim\mathbb{W} = n$ y $B_1$, $B_2$, $B_3$ son bases de respectivos $\mathbb{K}$-E.V.

$$\Rightarrow [g \circ f]_{B_1 B_2} = [g]_{B_2 B_3} \cdot [f]_{B_1 B_2}$$

**Corolario:** Si $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ es t.l. inversible, entonces:

$$[f^{-1}]_{B_2 B_1} = [f]^{-1}_{B_1 B_2}$$

**Observación:** Si $\mathbb{V} = \mathbb{W} \Rightarrow C(B_1, B_2) = C(B_2, B_1)^{-1}$

**Proposición:** $\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$ dos $\mathbb{K}$-E.V. $dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) = n$, $dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{W}) = m$. $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$, t.l. con $B_1, B_1'$ bases de $\mathbb{V}$ y $B_2, B_2'$ bases de $\mathbb{W}$

$$\Rightarrow [f]_{B_1' B_2'} = C_{B_2 B_2'} \cdot [f]_{B_1 B_2} \cdot C_{B_1 B_1'}$$

**Definición:** (**Proyectores**)
Decimos que una t.l. $p : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ es un Proyector si $p^2 = p$

**Observación:** Supongamos que $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$ son subespacios de $\mathbb{V}$ y que $\mathbb{V} = \mathbb{S} \oplus \mathbb{T} \Rightarrow \exists$ un proyector $p : \mathbb{V} \to \mathbb{V} \,/\, Ker(p) = \mathbb{S}$ y $Im(p) = \mathbb{T}$.

Notar: Para dados $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$ el proyector $p$ es único

# 3 Determinantes

## 3.1. Formula del Determinante

Dada una matriz $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, sean $C_1, \cdots, C_n$ las columnas de la matriz, entonces definimos:

$$det(A) = det(C_1, \cdots, C_n)$$

Existe una formula que permite calcular el determinante.
Para ello, si $1 \leq i \leq n$, sea $A(i|1)$ la matriz en $\mathbb{K}^{(m-1 \times (n-1))}$ obtenida a partir de $A$ eliminando la fila $i$ y la columna 1.
En general, si $1 \leq j \leq n$, $A(i|j)$ denotara la matriz obtenida de $A$ eliminando la fila $i$ y la columna $j$.
Luego, para el determinante vale la siguiente formula:

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \cdot a_{i,1} \cdot det(A(i|1)) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \cdot a_{1,i} \cdot det(A(1|i))$$

## 3.2. Propiedades del Determinante

**Propiedad:** Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, vale :

$$det(A) = det(A^t)$$

**Propiedad:** Si $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ es una matriz triangular superior o inferior, entonces:

$$det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

**Propiedad:** Si $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$, entonces:

$$det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B)$$

**Corolario:** Si $A$ es inversible, entonces:

$$det(A) \neq 0 \quad \wedge \quad det(A^{-1}) = (det(A))^{-1}$$

## 3.3. Adjunta de una Matriz

Dada $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, vamos a asiciarle una matriz que va a llamarse matriz adjunta de $A$, que sirve para calcular $A^{-1}$ (si esta existe).
**Definición:** Sea $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n \times n}$, la adjunta de $A$ es la matriz $adj(A) \in \mathbb{K}^{n \times n}$, tal que:

$$(adj(A))_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot det(A(j|i))$$

**Propiedad:** Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Vale que $A \cdot adj(A) = det(A) \cdot Id_n$. Luego, si $det(A) \neq 0$, entonces:

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{det(A)}$$

# 4 Autovalores y Autovectores

## 4.1. Definición y Propiedades

**Definición:** Una matriz $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $A = (a_{ij})$, se dice diagonal, si:

$$a_{ij} = 0 \ \ , \forall \ \ i \neq j$$

**Definición:** Dos matrices $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ se dicen Semejantes si existe $C \in \mathbb{K}^{n\times n}$ inversible tal que:

$$A = C \cdot B \cdot C^{-1}$$

**Definición:** Una matriz $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ se dice Diagonalizable si $A$ es semejante en una matriz diagonal.

**Definición:** Una transformación lineal $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ se dice diagonalizable si existe una base ordenada de $\mathbb{K}^n$ tal que $[f]_B$ es diagonal.

**Observación:** Notar que para toda base $B'$ de $\mathbb{K}^n$, $[f]_{B'}$ sera diagonalizable si $f$ lo es.
Del mismo modo, si $\mathbb{V}$ es un $\mathbb{K}$-ev de dimensión finito $n$ y $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ es una transformación lineal, decimos que $f$ es diagonalizable si existe $B$ base ordenada de $\mathbb{V}$ tal que $[f]_B$ es diagonal.

**Definición:** Sea $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ una transformación lineal de dimension finita. Dado $\vec{v} \neq \vec{0}$, con $\vec{v} \in \mathbb{V}$, decimos que $\vec{v}$ es un autovector de $f$ si existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $f(\vec{v}) = \lambda \cdot \vec{v}$.
En este caso diremos que $\lambda$ es autovalor de $f$ (y que $\vec{v}$ es autovector de $f$ de autovalor $\lambda$).

**Observación:** Sea $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ ; $dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) = n$. $f$ Se dice diagonalizable $\Leftrightarrow$ existe una base $B$ de $\mathbb{V}$ formado por autovector de $f$.

**Definición:** Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Se llama Polinomio Caracteristico de $A$ (y se escribe $\chi_A$) al polinomio:

$$\chi_A(\lambda) = det(\lambda \cdot Id_n - A) \quad \in \quad \mathbb{K}[\lambda]$$

**Observación:** Si $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $\chi_A(\lambda)$ es un polinomio de grado $n$ con coeficiente principal 1.

**Definición:** Si $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ transformacion lineal de dimensión $n$, se llama Polinomio Caracteristico de $f$ a $\chi_{[f]_B}(\lambda)$, donde $B$ es una base cualquiera de $\mathbb{V}$.

**Propiedad:** Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y sean $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ autovalor distintos de $A$ entonces:

$$V_{\lambda_j} \cup (V_{\lambda_1} + V_{\lambda_2} + \cdots + V_{\lambda_{j-1}} + V_{\lambda_{j+1}} + \cdots + V_{\lambda_r}) = \{0\} \ \ , \ \ \forall \ \ j \ , \ \ 1 \leq j \leq r$$

**Corolario:** Sea $\mathbb{S} = V_{\lambda_1} + \cdots + V_{\lambda_r}$, subespacio de $\mathbb{K}^n$, resulta:

$$\mathbb{S} = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_r}$$

**Teorema:** Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y sean $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ todos los autovalores distintos de $A$ en $\mathbb{K}$, soon equivalentes:

1. $A$ diagonalizable en $\mathbb{K}^{n\times n}$
2. $\mathbb{K}^n = \oplus_{i=1}^{r} V_{\lambda_i}$
3. $\chi_A(\alpha) = \prod_{i=1}^{r}(\alpha - \lambda_i)^{n_i}$, con $n_i = dim_{\mathbb{K}}(V_{\lambda_i})$ ; $\forall \ \ i \in [1, r]$

# 5 Diagonalización

## 5.1. Polinomios Minimales

Dada una matriz $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y un polinomio $p(x) \in \mathbb{K}[x]$, definimos la evaluación de $p(x)$ en $A$ como:

$$p(A) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot A^i \ , \ \in \mathbb{K}^{n\times n}$$

Donde, por definición se tiene que :

$$A^0 = Id_n, \ \in \mathbb{K}^{n\times n}$$

Por otro lado, si tenemos una transformación lineal $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$, definimos:

$$p(f) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot f^i$$

Donde, se tiene que :

1. $f^0 = Id_{\mathbb{V}}$
2. Además, $\forall \ \ k \in N$, se tiene que: $f^k = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k \ veces}$

**Lema:** Dado $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, existe un polinomio $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ tal que $p(A) = 0$

**Observación:** Si $p(A) = 0$ y $a_r$ es el coeficiente principal de $p(x)$, entonces:

$$s(x) = \frac{p(x)}{a_r}$$

Entonces $s(x)$ es un polinomio que se anula al evaluarlo en $A$ y su coeficiente principal es 1, es decir que es un polinomio monico.

Dado un polinomio $t(x)$, si dividimos a $t(x)$ por $m(x)$ escribimos:

$$t(x) = m(x) \cdot \underbrace{q(x)}_{Cociente} + \underbrace{r(x)}_{Resto} \ ; \ con \ r(x) = 0 \ 0 \ gr(r(x)) < gr(m(x)$$

Si ahora evaluamos en ambos lados por $A$, resulta entonces:

$$0 = t(A) = \underbrace{m(A)}_{=0} \cdot q(A) + r(A) \ , \quad \therefore \ r(A) = 0$$

Pero como $r(x) = 0$ o $r(x)$ tiene grado menor que el de $m(x)$ la única posibilidad es que $r(x) = 0$. Por lo tanto, $m(x)$ divide a $t(x)$.

En resumen, $m(x)$ es un polinomio monico, tal que $m(A) = 0$.

Luego, $m(x)$ es de grado minimo con estas propiedades y si $t(x)$ es un polinomio tal que $t(A) = 0$, entonces $m(x)$ divide a $t(x)$.

**Observación:** $m(x)$ es único y lo escribimos $m_A(x)$.

**Lema:** Sean $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Si $A$ y $B$ son semejantes, entonces, dado $p(x) \in\in \mathbb{K}[x]$, $(p(A) = 0 \ \Leftrightarrow \ p(B) = 0$.

**Corolario:** Si $A \sim B$ ( $\sim \ \Rightarrow$ semejante), entonces $m_A(x) = m_B(x)$.

**Definición:** Dadis $\mathbb{V}$, $\mathbb{K}$-ev de dimensión $n$, $B$ una base ordenada de $\mathbb{V}$ y $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ una transformación lineal, se define el polinomio minimal de $f$ como $m_f = m_{[f]_B}$.

**Proposición:** Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y sea $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces $\lambda$ es autovalor de $A \Leftrightarrow \lambda$ es raiz de $m_A(x)$, o sea $m_A(\lambda) = 0$.

## 5.2. Polinomio Minimal de un Vector

Dada $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $\vec{v} \in \mathbb{K}^n$, resulta que :

$$m_A(A) \cdot \vec{v} = \vec{0} \quad \in \mathbb{K}^n$$

Luego, se tiene que:

$$T = \{p(x) \in \mathbb{K}[x]/p(x) \ es \ monico \ y \ p(A) \cdot \vec{v} = 0\} \neq \varnothing$$

**Definición:** Dados $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y $\vec{v} \in \mathbb{K}^n$, el polinomio minimal de $\vec{v}$ para $A$ (notandolo $m_{A,v}(x)$) es el polinomio de menor grado de $\mathbb{T}$.

**Proposición:** Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y sea $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ una base de $\mathbb{K}^n$, vale que:

$$m_a(x) = min\{m_{A,v_i}(x), i = 1, \cdots, n\}$$

**Teorema:** (**Hamilton - Cayley**)
Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y $\chi_A(x)$ el polinomio caracteristico de $A$, entonces $m_A(x)$ divide a $\chi_A(x)$.

**Observación:** Notemos que el teorema anterior es equivalente a que $\chi_A(A) = 0$

**Corolario:** Valen los siguientes resultados:

1. $gr(m_A(x)) \leq n$
2. Si $gr(m_A(x)) = n \Rightarrow m_A = \chi_A$
3. Si existe $\vec{v} \in \mathbb{K}^n$ / $m_{A,v}(x) = n$, entonces $m_{A,v}(x) = m_A(x) = \chi_A(x)$

## 5.3. Un Criterio de Diagonalización Usando el Polinomio Minimal

**Observación:** Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y $\chi_A(x)$ el polinomio caracteristico de $A$. Si $\chi_A$ se factoriza linealmente en $\mathbb{K}[x]$ y tiene todas sus raices simples, entonces $A$ es diagonalizable.

**Proposición:** Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, entonces $A$ es diagonalizable en $\mathbb{K}^{n\times n}$ si y solo si $m_A$ tiene todas sus raices en $\mathbb{K}$ y son simples.

# 6 Espacios con Producto Interno

Vamos a centrarnos en los cuerpos $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$.

## 6.1. Producto Interno

Definición:(Producto Interno) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial. Un Producto interno de $\mathbb{V}$ es una función $\Phi : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{K}$, talque:

1. $\forall\, \alpha \in \mathbb{K}, \forall\, \vec{v}, \vec{w}, \vec{z} \in \mathbb{V}$
   - $\Phi(\vec{v} + \vec{w}, \vec{z}) = \Phi(\vec{v}, \vec{z}) + \Phi(\vec{w}, \vec{z})$
   - $\Phi(\alpha\vec{w}, \vec{z}) = \alpha\Phi(\vec{v}, \vec{z})$
2. $\Phi(\vec{v}, \vec{w}) = \overline{\Phi(\vec{v}, \vec{w})}$
3. $\Phi(\vec{v}, \vec{v}) > 0, \;\; si\ v \neq 0$

Notar que $\Phi(\vec{v}, \vec{v}) = \overline{\Phi(\vec{v}, \vec{v})}$. Luego $\Phi(\vec{v}, \vec{v}) \in \mathbb{R}$ y tiene sentido preguntarse si es positivo o negativo
Notación: En general, vamos a usar $\langle , \rangle : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{K}$ para productos internos.

Observación:

1. Si $\Phi$ es un Producto Interno $\forall\, \vec{v}, \vec{w}, \vec{z} \in \mathbb{V}$
   - $\Phi(v, w + z) = \overline{\Phi(w + z, v)} = \overline{\Phi(w, v)} + \overline{\Phi(z, v)} = \Phi(v, w) + \Phi(v, z)$
   - $\Phi(v, \alpha w) = \overline{\Phi(\alpha w, v)} = \overline{\alpha \cdot \Phi(w, v)} = \overline{\alpha} \cdot \overline{\Phi(w, v)} = \overline{\alpha} \cdot \Phi(v, w)$

Definición: (Norma) Se define la norma de $\vec{v}$ al producto interno $||\vec{v}|| =< \vec{v}, \vec{v} >^{\frac{1}{2}}$.

Propiedad:(De la Norma) Sea $(\mathbb{V}, \langle , \rangle)$ un **EVPI**.

1. $\forall \;\; \vec{v} \in \mathbb{V}, ||v|| \geq 0 \;\;$ y $\;\; ||\vec{v}|| = 0 \;\Leftrightarrow\; \vec{v} = \vec{0}$
2. Dados $\alpha \in \mathbb{K}$ y $v \in \mathbb{V}$, $||\alpha\vec{v}|| = |\alpha| \cdot ||\vec{v}||$
3. **Desigualdad de Cauchy-Schwartz:** $\forall\, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{V}$, $|\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle| \leq ||\vec{v}|| \cdot ||\vec{w}||$
4. **Desigualdad Triangular:** $\forall\, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{V}, \;\; ||\vec{v} + \vec{w}|| \leq ||\vec{v}|| + ||\vec{w}||$

Definición: Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-**EVPI**. Sean $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{V}$. La distancia entre los vectores $\vec{v}, \vec{w}$ de $\mathbb{V}$ es:

$$d(\vec{v}, \vec{w}) = ||\vec{v} - \vec{w}||$$

Observación:

1. $||\vec{v} - \vec{w}|| \geq 0, \;\; \forall \;\; \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{V}$
2. $||\vec{v} - \vec{w}|| = 0 \;\Leftrightarrow\; \vec{v} = \vec{w}$
3. $||\vec{v} - \vec{w}|| = ||\vec{w} - \vec{v}||$
4. $||\vec{v} - \vec{z}|| \leq ||\vec{v} - \vec{w}|| + ||\vec{w} - \vec{z}||$

Definición: Sea $(\mathbb{V}, \langle , \rangle)$ un espacio euclideo. Sean $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{V}$ ambos no nulos. El ángulo entre $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es el único $\alpha \in [0, \pi] \cup \mathbb{R}$ tal que:

$$\cos{(\alpha)} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{||\vec{v}|| \cdot ||\vec{w}||}$$

Observación:

$$||\vec{v} + \vec{w}||^2 = ||\vec{v}||^2 + ||\vec{w}||^2 + 2\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = ||\vec{v}||^2 + ||\vec{w}||^2 + 2\cos{(\alpha)}||\vec{v}|| \cdot ||\vec{w}||$$

## 6.2. Matriz de un Producto Interno

Supongamos que tenemos $\mathbb{V}$ un **EVPI** de dimensión finita. Luego, dada una base ordenada $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ y queremos asociar al producto interno con la base sobre una matriz.

**Definición:** Se define la matriz del producto interno $\langle , \rangle : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{K}$ en la base $B$ como sigue:

$$([\langle , \rangle_B])_{i,j} = \langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle \quad (1 \leq i, j \leq n)$$

**Observación:** Si $A = [\langle , \rangle_B]$, entonces $A_{ij} = \overline{A_{ji}}, \forall\, i, j$.
Sin embargo, como vimos, esta condicion no es suficiente para que $A$ sea la matriz asociada a un producto interno en alguna base.

**Proposición:** Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-EVPI y sea $B$ una base de $\mathbb{V}$ para cada $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{V}$, vale:

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = [\vec{v}]_B \cdot [\langle , \rangle] \cdot \overline{[\vec{w}]^t_B}$$

## 6.3. Ortogonalidad

En $\mathbb{R}^2$, sabemos que dos vectores con ortogonales (es decir, perpendiculares) si forman un ángulo recto, es decir, un ángulo cuyo coseno se anula.
Ya definimos el ángulo entre dos vectores de un $\mathbb{K}$-EVPI podemos entonces considerar la nocion de perpendicularidad.

**Definición:** Sea $(\mathbb{V}, \langle , \rangle)$ un $\mathbb{K}$-EVPI. Dos vectores $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{V}$ se dicen ortogonales o perpendiculares si $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$.
Notación: $\vec{v} \perp \vec{w}$
**Observación:** Si $\vec{v} \perp \vec{w}$, entonces $||\vec{v} + \vec{w}||^2 = ||\vec{v}||^2 + ||\vec{w}||^2$ (Pitagoras)
Más en general, un conjunto culquiera de vectores de $\mathbb{V}$ se dira Ortogonal si dos vectores culesquiera del conjunto son perpendiculares.
El conjunto se dira Ortonormal si es ortogonal y todos los vectores del mis, mo tienen norma 1, es decir:

$$\forall\ \vec{v}, \vec{w} \in \vec{X}\ ,\ si\ \vec{v} \neq \vec{w}\ \Rightarrow\ \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0\ y\ ademas\ \forall\ \vec{v} \in \mathbb{X}\ ,\ ||\vec{v}|| = 1$$

**Proposición:** Sea $(\mathbb{V}, \langle , \rangle)$ un EVPI y sea $\{v_1, \cdot, v_r\} \subseteq \mathbb{V}$ un conjunto ortogonal. Supongamos que $v_i \neq 0,\ \forall\ i$, entonces el conjunto $\{v_1, \cdot, v_r\}$ es Linealmente Independiente.

## 6.4. Metodo de Ortogonalización de Graham - Schmidt

Sea $(\mathbb{V}, \langle , \rangle)$ un EVPI y sea $\{v_1, \cdot, v_n\}$ una base de $\mathbb{V}$. Existe una base ortonormal (B.O.N) $B = \{w_1, \cdots, w_n\}$ tal que $\forall, j$ $1 \leq j \leq n$:

$$\underbrace{\langle \vec{v_1}, \cdots, \vec{v_j} \rangle}_{Subespacio\ generado} = \underbrace{\langle \vec{w_1}, \cdots, \vec{w_j} \rangle}_{Subespacio\ generado}$$

**Corolario:** Sea $(\mathbb{V}, \langle , \rangle)$ un EVPI de dimensión finita. Sea $\mathbb{S}$ un subespacio de $\mathbb{V}$, $\mathbb{S} \neq \{\vec{0}\}$. Entonces, existe una B.O.N de $\mathbb{V}$ que contiene una B.ON de $\mathbb{S}$.

## 6.5. Complemento Ortogonal

Si $(\mathbb{V}, \langle , \rangle)$ es un EVPI y $\mathbb{S}$ es un conjunto de $\mathbb{V}$, vamos a considerar el conjunto:

$$\mathbb{S}^\perp = \{\vec{v} \in \mathbb{V} : \vec{v} \perp \vec{s}\ ,\ \forall\ \vec{s} \in \mathbb{S}\}$$

**Definición:** $\mathbb{S}^\perp$ se llama el complemento oronormal de $\mathbb{S}$.

**Observación:**

1. $\mathbb{S}^{\perp}$ es un subespaio de $\mathbb{V}$.
2. $\mathbb{S}^{\perp} = \langle \mathbb{S}^{\perp} \rangle$

**Proposición:** Sea $(\mathbb{V}, \langle , \rangle)$ un EVPI y sea $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{V}$ un subespacio, entonces:

1. $\mathbb{S} \cap \mathbb{S}^{\perp} = \{\vec{0}\}_{\mathbb{V}}$
2. $\mathbb{S} + \mathbb{S}^{\perp} = \mathbb{V}$
3. $(\mathbb{S}^{\perp})^{\perp} = \mathbb{S}$

Luego, $\mathbb{S} \oplus \mathbb{S}^{\perp}$ y en particular $dim(\mathbb{S}) + dim(\mathbb{S}^{\perp}) = dim(\mathbb{V})$

## 6.6. Proyección Ortogonal

Dado un EVPI $(\mathbb{V}, \langle , \rangle)$ de dimensión finita y un subespacio $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{V}$. Sabemos que $\mathbb{V} = \mathbb{S} \oplus \mathbb{S}^{\perp}$. Se define la proyección ortogonal $P_{\mathbb{S}} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ sobre $\mathbb{S}$ como:

$$P_{\mathbb{S}}(\vec{v}) = P_{\mathbb{S}}(\vec{s} + \vec{t}) = \vec{s}\ , \quad si\ \vec{v} = \vec{s} + \vec{t}\ con\ \vec{s} \in \mathbb{S}\ ,\ \vec{t} \in \mathbb{S}^{\perp}$$

De otro modeo, si $B = \{v_1, \cdots, v_r, v_{r+1}, \cdots, v_n\}$ es una B.O.N de $\mathbb{V}$, con $\{v_1, \cdots, v_r\}$ base de $\mathbb{S}$ y $\{v_{r+1}, \cdots, v_n\}$ base de $\mathbb{S}^{\perp}$, entonces $P_{\mathbb{S}}(v_i) = \begin{cases} v_i & 1 \leq i \leq r \\ 0 & r+1 \leq i \leq n \end{cases}$

**Observación:** $P_{\mathbb{S}} + P_{\mathbb{S}^{\perp}} = Id_{\mathbb{V}}$

Podemos definir entonces la distancia de un punto del EVPI $\mathbb{V}$ a un subespacio $\mathbb{S}$.

**Definición:** Dado $\vec{v} \in \mathbb{S}$; $d(\vec{v}, \mathbb{S}) = Inf\{d(\vec{v}, \vec{s}) : \vec{s} \in \mathbb{S}\} = Inf\{||\vec{v} - \vec{s}|| : \vec{s} \in \mathbb{S}\}$

**Proposición:** $d(\vec{v}, \mathbb{S}) = ||\vec{v} - P_{\mathbb{S}}(\vec{v})||$

## 6.7. Adjunta de una Transformación Lineal

Fijamos $\mathbb{V}$ un EVPI de dimensión finita, $\langle , \rangle$ el producto interno. Sea $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ una transformación lineal, vamos a definir $f^* : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ la adjunta de $f$.

**Definición:** Dada $f$ una transfprmación lineal. La adjunta de $f$ es una transformación lineal $f^* : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ tal que $\forall,\ \ \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{V}$.

$$\langle f(\vec{v}), \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, f^*(\vec{w}) \rangle$$

**Proposición:** Sea $(\mathbb{V}, \langle , \rangle)$ EVPI de fimensión finita y sea $B$ una B.O.N de $\mathbb{V}$. Entonces:

$$[f^*]_B = (\overline{[f]_B})^t$$

## 6.8. Transformaciones Autoadjuntas

Sea $(\mathbb{V}, \langle , \rangle)$ un EVPIU de dimensión finita y $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ una Transformación Lineal. Sabemos que $f^* : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ es la unica t.l tal que $\forall\ \ \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{V}$, $\langle f(\vec{v}), \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, f^*(\vec{w}) \rangle$.

**Definición:** $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ t.l se dice Autoadjunta si $f = f^*$. Es decir, si

$$\forall\ \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{V}\ ,\ \langle f(\vec{v}), \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, f(\vec{w}) \rangle$$

**Proposición:** Sea $(\mathbb{V}, \langle , \rangle)$ un EVPI de dimensión finita y sea $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$. Son equivalesntes:

1. $f$ es autoadjunta
2. Si $B$ es B.O.N de $\mathbb{V}$, entonces $[f]_B$ es hermitiana (si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)
3. Existe $B$ una B.O.N de $\mathbb{V}$ tal que $[f]_B$ es hermitiana.

**Definición:** $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ se dice simetrica si $A_{ij} = A_{ji}, \forall \ \ 1 \le i, j \le n$. Equivalentemente $A = A^t$

**Definición:** $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ se dice hermitiana si $A_{ij=Aji}$ $\forall \ \ 1 \le i, j \le n$. Equivalentemente $A = A^*$

**Proposición:** Sea $(\mathbb{V}, \langle , \rangle)$ EVPI de dimensión finita y $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ t.l entonces:

1. $\chi_f$ tiene todas sus raices en $\mathbb{R}$
2. Existe una B.O.N $B$ de $\mathbb{V}$ tal que $[f]_B$ es diagnal con coeficientes en $\mathbb{R}$, es decir, que en particular existe una B.O.N de $\mathbb{V}$ formada por autovectores de $f$.

**Observación:** Notemos que, dada $A \in Mn(\mathbb{C})$ hermitiana, resulta que la t.l $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ dada por $f_A(\vec{v}) = A^{\vec{v}}$ es autoadjunta y por la propiedad anterior existe una B.O.N de $\mathbb{C}^n$ tal que $[f_A]_B = D$ es diagonal real y entonces:

$$D = C_{BE}^{-1} \cdot [f_A]_E \cdot C_{BE}$$

Como $E$ y $B$ son B.O.N de $\mathbb{C}^n$ con el producto interno canonico. Vemos que:

$$(C_{BE}^{-1})_{ij} = (C_{EB})_{ij} = \langle \vec{e}_j, \vec{v}_i \rangle = \langle \vec{v}_i, \vec{e}_j \rangle = \overline{(C_{BE})_{ji}} = (\overline{C_{BE}}^t)_{ij} = (C_{BE}^*)_{ij}$$

Luego: $C_{BE}^{-1} = C_{BE}^*$
Del mismo modo, si $A \in Mn(\mathbb{R})$, resulta $C_{BE}^{-1} = C_{BE}^t$

**Definición:**

- Una matris $U \in Mn(\mathbb{C})$ se dice unitaria si $U$ es inversible y $U^{-1} = U^*$
- Una matriz $O \in Mn(\mathbb{R})$ se dice ortogonal si es inversible y $O^{-1} = O^t$

**Observación:** Sea $(\mathbb{V}, \langle , \rangle)$ EVPI de dimensión finita y sean $B$ y $B'$ B.O.N de $\mathbb{V}$, etonces $C_{BB'}$ es unitaria (si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) y respectivamente es ortogonal (si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

## 6.9. Transformaciones Lineales Normales

Sea $(\mathbb{V}, \langle , \rangle)$ EVPI de dimensión finita y $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ una t.l. Decimos que $f$ es Normal si existe $f^* : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ y además $f^* \circ f = f \circ f^*$

**Proposición:** Sea $(\mathbb{V}, \langle , \rangle)$ EVPI de dimensión finita y $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ una t.l Normal, Sean $\vec{v} \in \mathbb{V}$ y $\lambda \in \mathbb{K}$. Son equivalentes:

1. $\vec{v}$ es autovector de $f$ de autovalor $\lambda$
2. $\vec{v}$ es autovector de $f^*$ de autovalor $\overline{\lambda}$

**Teorema:** Sea $(\mathbb{V}, \langle , \rangle)$ EVPI de dimensión finita. Si $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ es una t.l Normal, entonces existe una B.O.N $B$ de $\mathbb{V}$ formada por autovectores de $f$ y por lo tanto $f$ es diagonalizable en una B.O.N

**Corolario:** En las mismas hipotesis del teorema, son equivalentes:

1. $f$ es normal
2. Existe $B$ una B.O.N de $\mathbb{V}$ formada por autovectores de $f$

## 6.10. Transformaciones Lineales Unitarias/Ortogonales

A continuación vamos a ocuparnos de aquillas t.l. en un EVPI que preservan el producto interno (y por lo tanto preservan la norma). Se puede pensar en ellas como en transformaciones lineales rigidas.

**Teorema:** Sea $(\mathbb{V}, \langle , \rangle)$ EVPI de dimensión finita. Si $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ es una t.l

1. Existe B.O.N $B$ de $\mathbb{V}$ tal que $f(B)$ es B.O.N de $\mathbb{V}$
2. $\langle f(\vec{v}), f(\vec{w}) \rangle = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle, \ \forall \ \ \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{V}$
3. $\forall$ B.O.N $B$ de $\mathbb{V}$, $f(B)$ es B.O.N de $\mathbb{V}$
4. $||f(\vec{v})|| = ||\vec{v}||, \ \forall \ \ \vec{v} \in \mathbb{V}$
5. $f^* \circ f = f \circ f^* = Id_{\mathbb{V}}$

Una transformación lineal que satisface estas propiedades se dice unitaria (si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) o bien ortogonal (si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)

**Proposición:** Sea $(\mathbb{V}, \langle , \rangle)$ EVPI de dimensión finia y sea $B$ B.O.N de $\mathbb{V}$ , entonces $f$ es unitaria (o ortogonal) si y solo si $[f]_B$ es unitaria (o ortogonal)

**Lema:** Sea $(\mathbb{V}, \langle , \rangle)$ EVPI de dimensión finia. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ es una transformación lineal ortogonal y $\lambda \in \mathbb{R}$ es autovalor de $f$ entonces $|\lambda| = 1$

**Lema:** Sea $(\mathbb{V}, \langle , \rangle)$ EVPI de dimensión finia. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y ssea $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{V}$ un subespacio $f$-invariante con $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ es una transformación lineal ortogonal, entonces $\mathbb{S}^{\perp}$ tambien es $f$-invariante.

# 7 Formas de Jordan

Sabemos que no toda matriz es digonalizable. Por lo que buscamos un procedimiento que nos permita, dada una matriz $A \in Mn(\mathbb{K})$ encontrar una matriz $B$ semejante a $A$ (o sea tal que exista $C \in Mn(\mathbb{K})$ inversible con $A = C^{-1} \cdot B \cdot C$) de modo tal que $B$ se acerque lo más posible a una matriz diagonal y que en el caso en que $A$ sea diagonalizable, $B$ sea diagonal. Para eso vamos a pedir que el polinomio minimal de $A$, $m_A$, tenga todas sis raices en $\mathbb{K}$. Notemos que esto es siempre cierto si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, pero no lo es a veces cuando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Sabemos que, cuando $A$ es diagonalizable, si $\chi_A = \displaystyle\prod_{i=1}^{r}(x-\lambda_i)_i^n$ con $\lambda_i \neq \lambda_j$, si $i \neq j$, $n_i \in \mathbb{N}$ y $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} n_i = n$, entonces podemos elegir:

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 & & & & \\ & \ddots & & & 0 & & \\ 0 & & \lambda_1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \lambda_r & \cdots & 0 \\ 0 & & & & & \ddots & \\ & & & & 0 & \cdots & \lambda_r \end{pmatrix}$$

Es decir, que $B$ es una matriz de bloques diagonales, $\lambda_i \cdot Id_{n_i \times n_i}$ y que hay una base de autovectores.

En el caso general, $B$ tambien va a ser una matriz de bloques casi diagonales y los bloques van a corresponder a autovalores, pero la base no va a estar compuesta solo de autovectores.

Vamos a ir considerando casos cada vez más complicados hasta llegar al resultado general.

## 7.I. Parte I

Sea $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ una transformación lineal ($\mathbb{V}$ un espacio vectorial de dimension finita). Supongamos qeu $f$ es nilpotente (es decir, existe $l \in \mathbb{N} / f^l = 0$)

**Definición:** El indice de nilpotencia de $f$ es $min\{f^l = 0\} = l_0$

**Proposición:** En las condiciones anteriores, hay inclusiones estrictas:

$$0 \subsetneq Ker(f) \subsetneq Ker(f^2) \cdots \subsetneq Ker(f^{l_0 - 1}) \subsetneq Ker(f^{l_0}) = \mathbb{V}$$

**Teorema:** Sea $\mathbb{V}$ tal que $dim(\mathbb{V}) = n$ y $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ transformación lineal nilpotente de indice $l$. Existe una base $B$ de $\mathbb{V}$ tal que:

$$[f]_B = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_r \end{pmatrix}$$

Donde, para cada $i$, $1 \leq i \leq r$, $J_i$ es un bloque de Jordan nilpotente de tamaño $n_i \times n_i$ y $l = n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_r$

**Proposición:** Sea $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ una tranformación lineal nilpotente de indice $l$. Sea $din(\mathbb{V}) = n$. El bloque de Jordan más grande que aparece en $A$ es de tamaño $l \times l$. Además, para cada $i$ tal que $0 \leq i \leq l-1$, la cantidad de bloques de Jordan de tamaño mayor a $i$ que aparecen en $A$ es:

$$b_i = rg(A^i) - rg(A^{i+1})$$

En particular, la cantidad de bloques de Jordan que aparecen en $A$ es:

$$b_0 = n - rg(A) = dim(Ker(A)) = dim(Ker(f))$$

**Corolario:** Para cada $i$, $1 \leq i \leq l$, la cantidad de bloques de Jordan de Tamaño $i$ que aparecen en $A$ es:

$$C_i = rg(A^{i+j} - 2rg(A^i) + rg(A^{i-1}))$$

**Teorema:** Sean $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ matrices nilpotentes. Sean $j$ y $J'$ sus respectivas formas de Jordan, entonces, $A$ es semejante a $B$ si y solo si $J = J'$

## 7.2. Parte 2

Vamos ahora al caso general (siempre suponiendo que el minimal tiene todas sus raices en $\mathbb{K}$). Vamos a suponer primero que ]$f$ es tal que su polinomio minimal tiene una unica raiz. Sea entonces $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ tal que $m_f = (X - \lambda)^l$ con $l \leq n$.

Entonces $(f - \lambda \cdot Id)^l = 0$ pero $(f - \lambda \cdot Id)^{l-1} \neq 0$. Porque vimos en la parte anterior, como $g = f - \lambda \cdot Id$ es nilpotente de indice $l$, existe una base $B$ de $\mathbb{V}$ tal que

$$[f - \lambda \cdot Id]_B = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_r \end{pmatrix}$$

es una forma de Jordan nilpotente donde para cada $1 \leq i \leq r$, $J_i \in Mn_i(\mathbb{K})$ y $l = n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_r$ Notemos que

$$[f]_B = [f - \lambda \cdot Id + \lambda \cdot Id]_B = [f - \lambda \cdot Id] + \lambda \cdot Id$$

Y por lo tanto

$$[f]_B = \begin{pmatrix} J(\lambda, n_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J(\lambda, n_r) \end{pmatrix} \quad con \quad J(\lambda, n_i) = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda \end{pmatrix} \in Mn_i(\mathbb{K}) \quad (Bloque\ de\ Jordan)$$

**Definición:** Dada $J \in Mn(\mathbb{K})$ decimos que $J$ es una forma de Jordan (o matriz de Jordan) si:

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_s \end{pmatrix} \quad con \quad J_i = \begin{pmatrix} J(\lambda_i, n_1^{(i)}) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & J(\lambda_i, n_{r_i}^{(i)}) \end{pmatrix}$$

Para cada $i$, $1 \leq i \leq s$ con $n_1^{(i)} \geq n_2^{(i)} \geq \cdots n_{r_i}^{(i)}$ y $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$. Osea, cada $J_i$ está formada por bloqes de Jordan de autovalor $\lambda_i$ ubicadas sobre la diagonal.

**Teorema:** Sean $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimensión finita y $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ una transformación lineal tal que $m_f$ tiene todas las raices en $\mathbb{K}$. Entonces, existe una base $B$ de $\mathbb{V}$ tal que $[f]_B$ es una matriz de Jordan.

**Corolario:** Toda matriz $A \in Mn(\mathbb{C})$ es semejante a una matriz de Jordan.

**Lema:** Sean $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimensión finita y $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ una transformación lineal. Escribimos $m_f = P \cdot Q$, donde $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ y $MCD(P, Q) = 1$. Entonces:

1. $Ker(P(f))$ y $Ker(Q(f))$ son subespacios $f$-invariantes de $\mathbb{V}$
2. $\mathbb{V} = Ker(P(f)) \oplus Ker(Q(f))$
3. $m_{f_{|Ker(P(f))}} = P \quad$ y $\quad m_{f_{|Ker(Q(f))}} = Q$