


---

# ÓPTICA GEOMÉTRICA

---

APUNTES

 **Ezequiel Remus**  
ezequielremus@gmail.com

2 de junio de 2023

## Índice

<b>1. El Espectro Electromagnético</b>	<b>2</b>
1.1. Rango Energético . . . . .	2
<b>2. Descripción Geométrica de la Luz</b>	<b>3</b>
2.1. Ley de Snell . . . . .	3
2.2. Principio de Mínimo Tiempo y Camino Óptico . . . . .	5
2.3. Analizando la Ley . . . . .	7
2.4. Ejercicios . . . . .	7
2.4.1. Ejercicio Simple . . . . .	7
2.4.2. ¿Cómo afecta una interfaz? . . . . .	8
2.4.3. El rayo rebelde . . . . .	8
2.5. La lámina sumergida . . . . .	9
2.5.1. Rebotando en la caja de cristal . . . . .	10
2.5.2. La fibra óptica . . . . .	11
<b>3. Sistemas Dispersores</b>	<b>14</b>
<b>4. Descripción Geométrica - Dioptras y lentes</b>	<b>17</b>
4.1. Dioptras Planas . . . . .	17
4.2. Dioptras Esfericas . . . . .	19
4.2.1. Análisis de la ecuación de la dioptra . . . . .	21
<b>5. Lentes</b>	<b>25</b>
5.1. Clasificación de lentes según su forma . . . . .	26
5.2. Desmintiendo Mitos . . . . .	26
5.3. Gráficos $S'$ Vs $S$ . . . . .	27

## RESUMEN

*Alerta!: Este apunte esta hecho por un estudiante. Si se tiene duda de lo que se esta haciendo, recurrir al profesor. El sabrá que hacer.*

La luz puede ser descripta según la escala de lo que se este buscando estudiar, en particular se toma como parámetro de caracterización a la relación del tamaño de los objetos respecto a la longitud de onda  $\lambda$  de la onda. En este apunte nos centraremos en la física de la luz visible en interacción con objetos macroscópicos, es decir la física que se observa en experimentos donde la longitud de onda de la luz es muy pequeña en relación al tamaño de los objetos.

### 1. El Espectro Electromagnético

El espectro electromagnético es básicamente la distribución energética del conjunto de las ondas electromagnéticas. Los objetos son capaces de hacer dos cosas: *Emitir* o *Absorber* la radiación electromagnética. Veremos como eso nos permitirá caracterizar ciertos materiales en base a como interactúa en particular la velocidad de la onda de la luz con los materiales.

#### 1.1. Rango Energético

Si bien el espectro electromagnético es formalmente infinito y continuo, es de mucha utilidad ir “Cortando” el espectro en ciertos rangos convenientes según las características que tienen dichos intervalos.

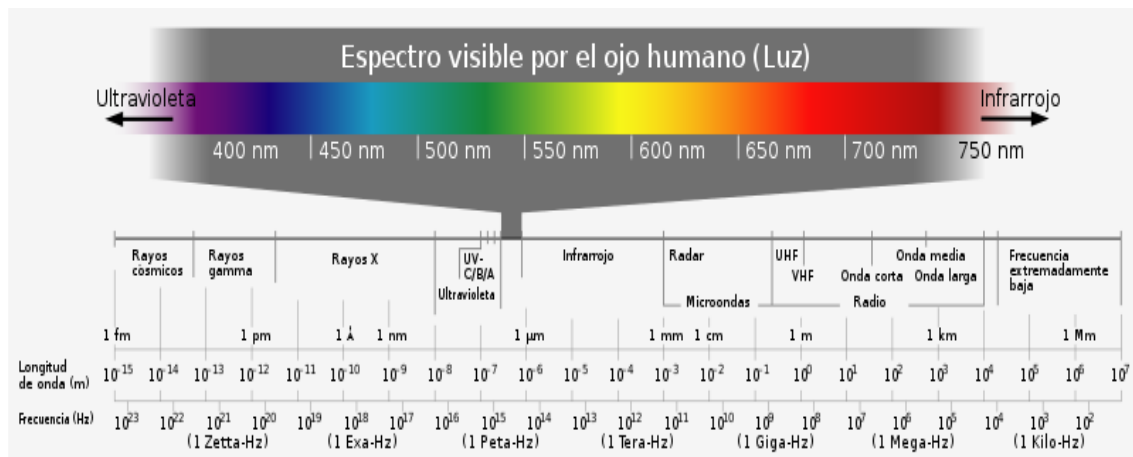


Figura 1: Espectro Electromagnético (Fuente: Wikipedia)

Hablemos un poco de las escalas, que como se ve en la **Figura 1**.

Relacionemos algunos valores de unidades para recordar como es que estos se relacionan. Se tiene que

$$1 \cdot 10^3 \text{ mm} = 1 \text{ m} = 1 \cdot 10^6 \text{ } \mu\text{m} = 1 \cdot 10^9 \text{ nm} = 1 \cdot 10^{10} \text{ } \text{Å}$$

Identifiquemos algunos rangos de interés:

- **Los rayos  $\gamma$**  tienen una longitud de onda de entre  $1 \cdot 10^{-11} \text{ m}$  y  $1 \cdot 10^{-12} \text{ m}$ . La energía de esta naturaleza se mide en *mega-electronvoltios (MeV)*. Un *MeV* corresponde a fotones gamma de longitudes de onda inferiores a  $1 \cdot 10^{-11} \text{ m}$  o a frecuencias superiores a  $10^{19} \text{ Hz}$ . Estos se manipulan en medicina para tratamientos de medicina nuclear.
- **Las Microondas** son ondas mucho mas grandes, son del orden de los centímetros. Estas producen frecuencias del orden de los *GHz* y pueden entrar en resonancia con las moléculas de agua en solidos y líquidos. De hecho, los microondas que tenemos en casa aprovechan justamente este hecho. Estos producen un campo eléctrico variable en el tiempo que oscila en resonancia con las moléculas del agua excitando de forma discontinua a las moléculas para entregarles la energía cinética necesaria que luego se transformara en energía térmica.

- **El rango visible** es la región del espectro electromagnético que el ojo humano es capaz de percibir. No hay límites exactos en el espectro visible, sin embargo el ojo humano típico responderá a longitudes de onda de 380 a 750nm es decir esta en el orden de los  $1 \cdot 10^{-9}m$

Según cuál sean los objetos que estemos estudiando y el rango de la onda que estemos aplicando sera distinta la estrategia de estudio que debemos aplicar. A grandes rasgos podemos hacer la siguiente subdivisión según la comparación de la longitud de onda y el tamaño de los objetos:

- $\lambda \ll$  objeto  $\Rightarrow$  Descripción de la luz como un *rayo* (Descripción Geométrica).
- $\lambda \sim$  objeto  $\Rightarrow$  Descripción de la luz como una *Onda* (Óptica Física).
- $\lambda \gg$  objeto  $\Rightarrow$  Descripción de la luz como *Partícula* (Óptica Cuántica).

## 2. Descripción Geométrica de la Luz

Como dijimos, la descripción de la luz en el rango visible se corresponde según el modelo de *Rayo* el cual supone que la luz viaja en línea recta. El rayo corresponde al flujo de la energía del espectro en dicho rango. La luz se mueve de forma tal que la dirección de propagación de el rayo ( $\vec{\kappa}$ ) es siempre perpendicular al frente de onda.

Esta descripción surgió hace siglos al hacer deducciones experimentales. Identifiquemos esta Fenomenología.

1. En medios homogéneos, los rayos se propagan en línea recta.
2. Dada una superficie que separa dos medios homogéneos, se observa que el cambio de medio produce un rayo reflejado en el primer medio y uno transmitido en el segundo.
3. Tanto rayo transmitido como incidente como reflejado se encuentran definido en un mismo plano, este plano se define a partir del rayo incidente y la normal de la superficie de separación de ambos medios. A este plano se lo conoce con el nombre de *Plano de Incidencia*. En particular, el rayo incidente formara un ángulo ( $\theta_i$ ) medidos desde la normal a la superficie.
4. El ángulo reflejado en la superficie ( $\theta_r$ ) es igual al ángulo que forma el rayo incidente con la normal.

$$\theta_r = \theta_i \quad (1)$$

5. El cociente entre el seno del ángulo transmitido y el seno del ángulo de incidencia solo depende de los medios involucrados y es constante

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_r} = cte(1, 2) \quad (2)$$

### 2.1. Ley de Snell

Ahora, es necesario entender quien es esta constante. Sabemos que la luz tiene una cierta velocidad de propagación el cual en particular es máxima en el vacío y que en particular, cada medio tiene una distribución molecular que depende de cada material. Por lo tanto, la luz se propagara a distintas velocidades según sea por el medio que este viajando.

Si la velocidad de la luz en el vacío viaja con velocidad  $c$  y esta es máxima. Al viajar en un medio distinto de vacío se debe cumplir que

$$v < c$$

Por lo que podemos definir entonces que

$$v = \frac{c}{n} \Rightarrow n = \frac{c}{v} \quad (3)$$

La relación uno nos define una constante característica para cada medio. Al parámetro  $n$  se lo conoce como *Índice de Refracción*.

Imaginemos que tenemos un haz de luz incidente sobre una superficie que divide a dos medios en los cuales la luz viaja a velocidades  $v_1$  y  $v_2$  en un determinado ángulo  $\theta_i$ . Podemos suponer que al comparar dos rayos distintos uno va a cruzar la superficie antes que el otro, como se muestra en el esquema de la **figura 3**

Viendo el triangulo que relaciona al  $\theta_i$  con la distancia entre los dos rayos ( $d$ ) y midiendo el ángulo del rayo transmitido, podemos relacionar a los senos como sigue

$$\begin{cases} \sin \theta_i = \frac{v_1 t}{d} \\ \sin \theta_t = \frac{v_2 t}{d} \end{cases}$$

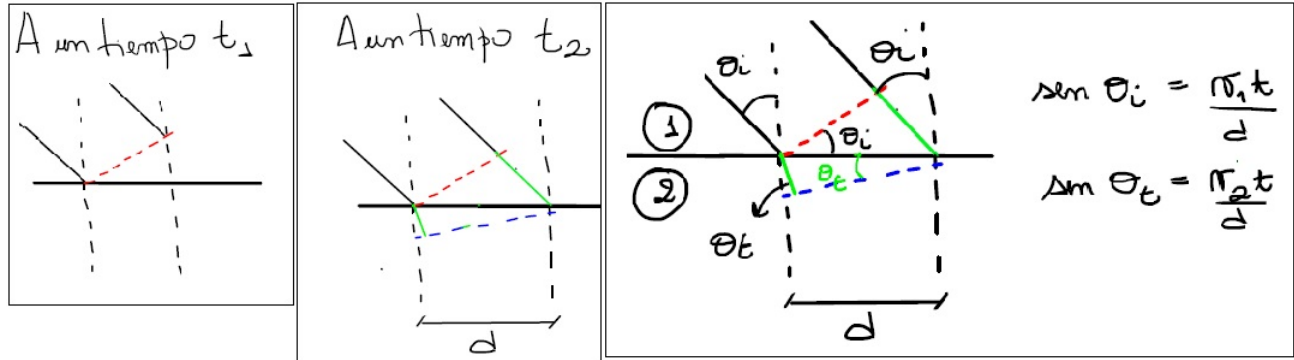


Figura 2: Esquema del problema

Realizamos el cociente entre los senos para calcular la constante

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{\frac{v_1 t}{d}}{\frac{v_2 t}{d}} \iff \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{v_1}{v_2}$$

Recordando que las velocidades de los medios eran  $v_1 = \frac{c}{n_1}$  y  $v_2 = \frac{c}{n_2}$  y reemplazando en el resultado anterior se tiene que

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t \quad (4)$$

Esta es la expresión de la *ley de Snell*.

## 2.2. Principio de Mínimo Tiempo y Camino Óptico

También es posible llegar a esta expresión usando el *Principio variacional de Fermat*.

Este principio afirma que el trayecto seguido por la luz al propagarse de un punto a otro es tal que el tiempo empleado en recorrerlo es (mínimo) estacionario respecto a posibles variaciones de la trayectoria. Notemos que:

*Dados dos puntos A y B en un plano vertical, ¿Cuál es la curva trazada por un punto que se mueve sólo por gravedad, el cual inicia en A? y termina en B en el menor tiempo posible?*

Sabemos que el tiempo total va a ser el tiempo que tarda en recorrerse todo el tramo  $\overline{AB}$  va a ser la suma de el tiempo recorrido por los tramos  $\overline{AO}$  y  $\overline{OB}$ . Por lo que, como suponemos líneas rectas se tiene que:

$$t = \frac{\overline{AO}}{v_1} + \frac{\overline{OB}}{v_2} \quad (5)$$

donde  $v_1$  es la velocidad a la cual la luz viaja en el medio incidente y  $v_2$  la velocidad de la luz en el segundo medio (después de la refracción).

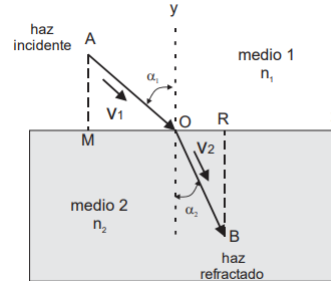


Figura 3: Esquema para hallar la trayectoria.

$$\frac{\overline{AO}}{\overline{AM}} = \sec(\alpha_1) \quad y \quad \frac{\overline{OB}}{\overline{RB}} = \sec(\alpha_2) \quad (6)$$

Reemplazando en la ecuación para el tiempo, tenemos que:

$$t = \frac{\overline{AM}\sec(\alpha_1)}{v_1} + \frac{\overline{RB}\sec(\alpha_2)}{v_2} \quad (7)$$

Como buscamos el tiempo mínimo en recorrer los tramos, debemos derivar e igualar a cero. Donde obtenemos:

$$dt = \frac{\overline{AM}\sec(\alpha_1)\tan(\alpha_1)d\alpha}{v_1} + \frac{\overline{RB}\sec(\alpha_2)\tan(\alpha_2)d\alpha}{v_2} \quad (8)$$

Ahora, notemos que, en particular:

$$\overline{MO} + \overline{OR} = cte \quad (9)$$

Donde podemos ver del esquema de la Figura 3, que

$$\overline{MO} = \overline{AM}\tan(\alpha_1) \quad y \quad \overline{OR} = \overline{RB}\tan(\alpha_2) \quad (10)$$

Entonces, si derivamos esta suma, esta sera nula, lo que nos permitirá relacionar mejor estas cantidades

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} (\overline{MO} + \overline{OR}) &= \frac{d}{d\alpha} (\overline{AM}\tan(\alpha_1) + \overline{RB}\tan(\alpha_2)) = 0 \\ \overline{AM}\sec^2(\alpha_1) &= -\overline{RB}\sec^2(\alpha_2) \end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación para  $dt$  se obtiene que:  $\frac{\sec(\alpha_1)}{v_1} = \frac{\sec(\alpha_2)}{v_2}$  Y como vimos antes  $n \sim \frac{1}{v}$ , por lo que obtenemos una ecuación análoga a la ley de snell:

$$\frac{\sec(\alpha_1)}{v_1} = \frac{\sec(\alpha_2)}{v_2} \iff n_1 \sec(\alpha_1) = n_2 \sec(\alpha_2) \quad (11)$$

Esto quiere decir que, si se expresa el trayecto recorrido por la luz entre dos puntos  $A$  y  $B$  por medio de una funcional llamada camino óptico definida como  $\mathcal{L}_{A,B}[n(\underline{r})]$  la trayectoria real de la luz seguirá un camino mas corto dado por

$$\mathcal{L}_{A,B}[n(\underline{r})] = \int_A^B n(\underline{r}) d\underline{r} \quad (12)$$

Donde  $n(\underline{r})$  es el índice de refracción que varía a lo largo de la trayectoria realizada por el rayo de luz.

Ahora, supongamos que queremos describir el trayecto que realiza un rayo de luz al rebotar en un espejo.

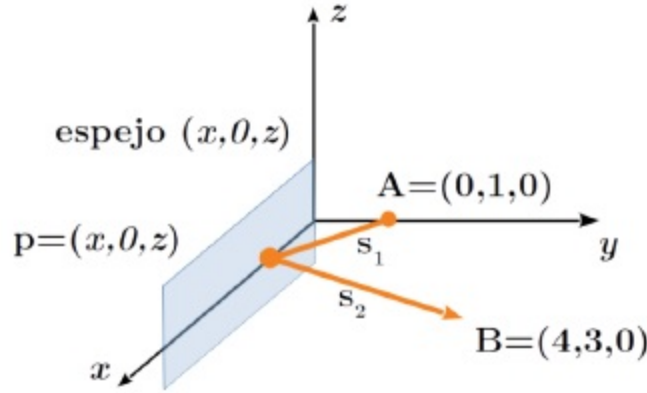


Figura 4: Rayo de luz rebotando en un espejo

Entonces: ¿Qué camino realiza un rayo de luz para poder ir de A a B?

Notemos que la función  $n(\underline{r})$  acá esta defendía por una función partida que involucra a los dos segmentos  $S_1$  y  $S_2$ . Planteemos la integral de camino antes definida

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{A,B}[n(\underline{r})] &= \int_A^B n(\underline{r}) d\underline{r} = \int_A^B n((x, y, z)) d\underline{S} = \int_A^B n((x, y, z)) d\underline{S} = \\ & nS_1 + nS_2 \underbrace{=}_{n=1} \underline{S}_1 + \underline{S}_2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el camino óptico viene dado por el modulo de dichos vectores

$$\mathcal{L}_{A,B}[n(\underline{r})] = \sqrt{x^2 + (y-1)^2 + z^2} + \sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2 + z^2}$$

Luego, para encontrar  $\mathcal{L}_{(x,0,z)}$  segun el principio variacional de fermat, debemos buscar el regimen estacionario, es decir, cuando el camino optico es minimo lo que es lo mismo que pedir que

$$\nabla \mathcal{L} = \left( \frac{\partial \mathcal{L}_{(x,0,z)}}{\partial x}, \frac{\partial \mathcal{L}_{(x,0,z)}}{\partial y}, \frac{\partial \mathcal{L}_{(x,0,z)}}{\partial z} \right) = (0, 0, 0)$$

Resolvamos entonces  $\nabla \mathcal{L}$

1.  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+(y-1)^2+z^2}} + \frac{x-4}{\sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2+z^2}} \xrightarrow{(x,0,z)} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1+z^2}} + \frac{x-4}{\sqrt{(x-4)^2+9+z^2}} = 0$
2.  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{y-1}{\sqrt{x^2+(y-1)^2+z^2}} + \frac{y-3}{\sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2+z^2}} \xrightarrow{(x,0,z)} = \frac{-1}{\sqrt{x^2+1+z^2}} + \frac{-3}{\sqrt{(x-4)^2+9+z^2}} = 0$
3.  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2+(y-1)^2+z^2}} + \frac{z}{\sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2+z^2}} \xrightarrow{(x,0,z)} = z \left( \frac{1}{\sqrt{x^2+1+z^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-4)^2+9+z^2}} \right) = 0$

Notemos que a partir de (3) se tiene que  $z$  debe ser 0, pues es la única solución lógica. Luego, al volcar este resultado en la ecuación (1), se tiene

$$\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{x-4}{\sqrt{(x-4)^2+9}} &= 0 \\ x\sqrt{(x-4)^2+9} + (x-4)\sqrt{x^2+1} &= 0 \\ x\sqrt{(x-4)^2+9} &= -(x-4)\sqrt{x^2+1} \\ x^2[(x-4)^2+9] &= (x-4)^2(x^2+1) \\ x^2[(x-4)^2+9] &= (x-4)^2(x^2+1) \end{aligned}$$

$$x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \end{cases} \quad (13)$$

Notar que  $x_2 = -2$  no nos sirve como resultado. Mismo, no es una verdadera solución al reemplazar el resultado en (1) no es solución (se puede verificar esto graficando (1) en Geogebra o alguna herramienta gráfica). Notemos

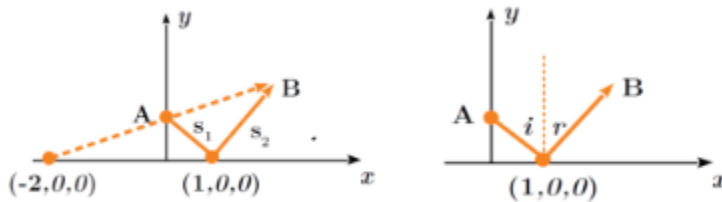


Figura 5: Lo que pasa con el rayo reflejado. El caso de la Izquierda tiene el caso desechado

que si tomamos un rayo directo entre  $A$  y  $B$  este recorre un menor camino óptico que el anterior, pero ¿Esto no es contradictorio?.

Claramente no, porque nosotros queremos calcular el rayo reflejado por la interfaz entre medios y el rayo del segmento  $\overline{AB}$  no involucra esta interfaz.

### 2.3. Analizando la Ley

Ahora, saliendo de este ejemplo analicemos un poco más con la ley de Snell. La ley nos relaciona los ángulos incidente y transmitido de la siguiente forma:

$$n_1 \text{sen}(\theta_i) = n_2 \text{sen}(\theta_t) \quad (14)$$

Ahora, supongamos una interfaz Aire-Agua, donde, al ser el aire menos denso que el agua la velocidad de la luz en el aire será mayor que en el caso del agua. De hecho, los coeficientes de refracción son:

$$n_{\text{agua}} = 1,33 > n_{\text{aire}} \sim 1$$

Luego, supongamos un rayo de luz que incide desde agua hacia aire cuyo ángulo de incidencia es  $\theta_i = 30^\circ$ , entonces tenemos que

$$n_{\text{agua}} \text{sen}(\theta_i) = n_{\text{aire}} \text{sen}(\theta_t) \iff \frac{n_{\text{agua}}}{n_{\text{aire}}} \text{sen}(30^\circ) = \text{sen}(\theta_t)$$

$$\theta_t = 41,68^\circ > \theta_i$$

En particular, se puede generalizar que:

- Si  $n_t > n_i \Rightarrow \frac{n_i}{n_t} < 1$  entonces el rayo transmitido se acerca a la normal.
- Si  $n_t < n_i \Rightarrow \frac{n_i}{n_t} > 1$  entonces el rayo transmitido se aleja de la normal.

Por otro lado, supongamos que estamos en el caso en que  $\frac{n_i}{n_t} > 1$  y incidimos cada vez con ángulos de incidencia mayores, entonces, vamos a llegar al punto en que, si la velocidad de la luz en el medio 2 viaja con una velocidad menor que en el medio 1, puede darse que para un ángulo  $\theta_i$  resulte un ángulo transmitido de  $\theta_t = \frac{\pi}{2}$ . A este ángulo se lo conoce como **ángulo de incidencia crítico**. El cual, por obvias razones, puede ser calculado como:

$$\text{sen}(\theta_c) = \frac{n_t}{n_i} \quad \text{Angulo Critico}$$

Luego, si  $\theta_c \leq \theta_i$  no habrá rayo transmitido y toda la energía se va al reflejado.

### 2.4. Ejercicios

#### 2.4.1. Ejercicio Simple

Un rayo de luz llega a la interfase aire-liquido con un ángulo de  $55^\circ$ . Se observa que el rayo refractado se transmite a  $40^\circ$ . ¿Cuál es el índice de refracción del liquido?

Este ejercicio implica una aplicación directa. Si tomamos  $n_{aire} \sim 1$ . Sabiendo que el medio en el que incide la luz es el aire y se transmita en liquido tenemos

$$\text{sen}(55^\circ) = n_l \text{sen}(40^\circ)$$

$$n_l = \frac{\text{sen}(55^\circ)}{\text{sen}(40^\circ)} = 1,27$$

Sabíamos, en base a la generalización anterior, que si el rayo transmitido se acercaba a la normal implicaba que  $\frac{n_i}{n_t} < 1$  o lo que es lo mismo  $n_t > n_i$  que es en el que estamos ahora, así que las cuentas que hicimos están bien y llegamos a que el liquido tiene un índice de refracción de  $n_l = 1,27$  el cual (si buscamos en tablas de índices) podemos ver que es un índice similar al cianuro de hidrógeno (HCN) cuando  $\lambda = 589nm$  que es un rayo de color anaranjado.

### 2.4.2. ¿Cómo afecta una interfaz?

Un haz de luz incide desde el aire ( $n = 1$ ) sobre una lámina de vidrio de índice de refracción  $n_v$  desconocido y espesor  $d$ . Al otro lado del vidrio hay agua de índice de refracción  $n_{agua} = 1,33$ . El ángulo de incidencia en la interfase aire – vidrio es  $30^\circ$ . Calcule el ángulo que el rayo refractado forma con la normal a la superficie en el agua.

Este problema es super interesante, y esto es porque es un ejemplo de porque podemos pensar a la interfase entre un medio y otro como algo infinitamente fino, como una superficie de separación que no nos afecta en el medio que vamos a calcular.

Hagamos un esquema de la situación

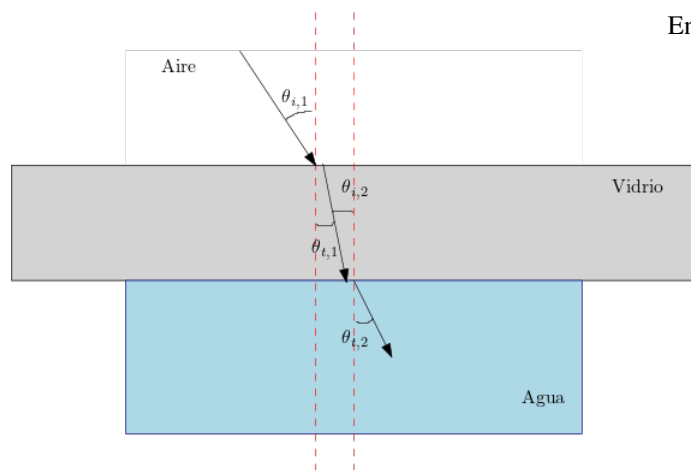


Figura 6: Diagrama del ejercicio

Dividamos el problema en dos casos, el de aire-vidrio y el de vidrio-agua y relacionemos ambos.

En primer lugar, para la situación aire-vidrio tenemos

$$\text{sen}(\theta_{i,1}) = n_v \text{sen}(\theta_{t,1})$$

Caso en el que solo conocemos  $\theta_{i,1} = 30^\circ$

Para el segundo caso

$$n_v \text{sen}(\theta_{i,2}) = n_{agua} \text{sen}(\theta_{t,2})$$

Donde no conocemos  $\theta_{i,2}$ ,  $n_v$  ni  $\theta_{t,2}$   
Pero, se puede ver en el diagrama que

$$\theta_{t,1} = \theta_{i,2}$$

Quedándonos la relación

$$\text{sen}(\theta_{i,1}) = n_v \text{sen}(\theta_{t,1}) = n_{agua} \text{sen}(\theta_{t,2})$$

$$\text{sen}(\theta_{i,1}) = n_{agua} \text{sen}(\theta_{t,2})$$

Por lo que podemos olvidarnos del vidrio y calcular  $\theta_{t,2}$  a partir de datos

Por lo que **podemos olvidarnos del vidrio y calcular  $\theta_{t,2}$  a partir de datos.**

Recordando la generalización, debería parar que el rayo de luz en el agua se acerca a la normal, pues  $n_i < n_t$

Haciendo la cuenta

$$\theta_{t,2} = \text{sen}^{-1} \left( \frac{\text{sen}(\theta_{i,1})}{n_{agua}} \right) = 22,3^\circ$$

Donde se cumple que el ángulo de incidencia es mayor al refractado.

### 2.4.3. El rayo rebelde

Un rayo de luz, que se propaga en un medio cuyo índice de refracción es  $n_i = 2$  incide formando un ángulo de  $30^\circ$  respecto a la normal a la superficie de separación, que la separa de otro medio de índice  $n_t = 1,5$ . Calcule el ángulo que forma el rayo transmitido con la normal a la superficie. Calcule el ángulo mínimo con el que debería incidir el rayo para que no se transmita nada.



Primero, calculemos el ángulo que forma el transmitido según los datos dados. Sospechamos que se alejara de la normal, pues  $n_i > n_t$

$$\begin{aligned} n_i \text{sen}(\theta_i) &= n_t \text{sen}(\theta_t) \\ 2 \text{sen}(30^\circ) &= 1,5 \text{sen}(\theta_t) \\ \theta_t &= \text{sen}^{-1} \left( \frac{2 \text{sen}(30^\circ)}{1,5} \right) = 41,81^\circ \end{aligned}$$

Observamos que se cumple nuestra predicción inicial.

Ahora, calculemos cual sera el ángulo mínimo de incidencia necesario de forma que no exista rayo transmitido. Para esto, busquemos que  $\text{sen}(\theta_t) = 1$

$$\theta_c = \text{sen}^{-1} \left( \frac{n_t}{n_i} \right) = \text{sen}^{-1} \left( \frac{1,5}{2} \right) = 48,59^\circ$$

Luego, cualquier ángulo de incidencia  $\theta_i$  tal que  $\theta_i > \theta_c$  cumplira el hecho de que el rayo se refleje por completo.

### 2.5. La lámina sumergida

Verificar que un rayo que incide sobre una lámina de caras paralelas, inmersa en un medio único, no se desvía al atravesarla. Calcule el desplazamiento lateral  $\Delta$  de dicho rayo, en términos de su espesor  $d$ , el ángulo  $\theta_i$  y su índice de refracción.

El diagrama de la situación es la siguiente

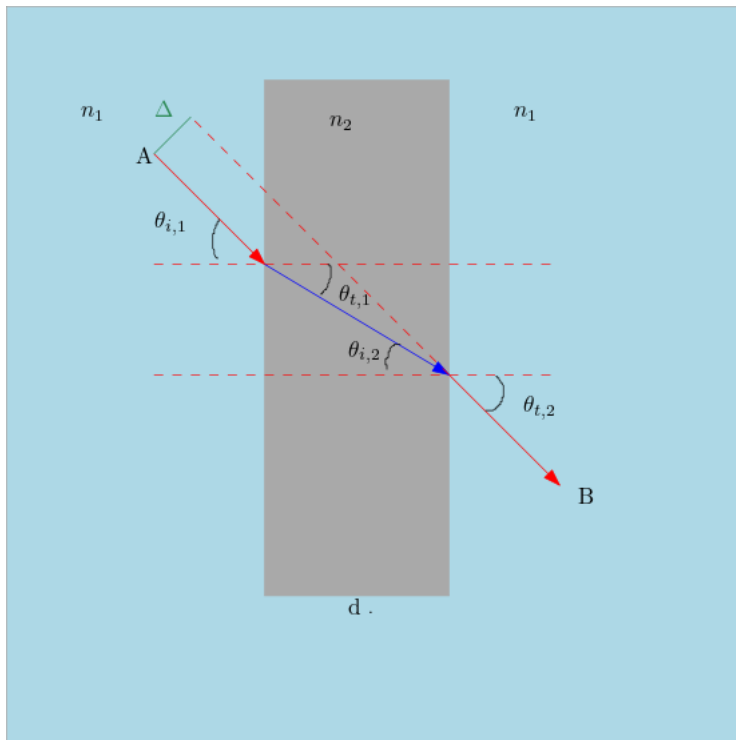


Figura 7: Diagrama del ejercicio

Es fácil ver que los rayos que inciden en el primer medio y salen en el segundo medio son paralelos, pues en la figura se ve que  $\theta_{t,1} = \theta_{i,2}$ . Por Snell se tiene que

$$n_1 \text{sen}(\theta_{i,1}) = n_2 \text{sen}(\theta_{t,1}) = n_2 \text{sen}(\theta_{i,2})$$

y además

$$n_2 \text{sen}(\theta_{i,2}) = n_1 \text{sen}(\theta_{t,2})$$

Entonces

$$n_1 \text{sen}(\theta_{i,1}) = n_1 \text{sen}(\theta_{t,2}) \iff \theta_{i,1} = \theta_{t,2}$$

Por lo que el rayo no se desvía al atravesar la lamina. Sin embargo, si se desplaza en cierto valor marcado en la figura 7 como  $\Delta$ .

Notemos que el largo del rayo azul se puede calcular como

$$l = \frac{d}{\cos(\theta_{i,2})}$$

Por otro lado, teniendo en cuenta el triangulo rectángulo que se forma entre la proyección paralela de  $B$  respecto de  $A$ , el rayo azul y el segmento  $\Delta$  es facil ver que

$$\Delta = l \text{sen}(\theta_{t,2} - \theta_{t,1}) = \frac{d}{\cos(\theta_{i,2})} \text{sen}(\theta_{t,2} - \theta_{t,1})$$

Sabemos ya que  $\theta_{t,2} = \theta_{i,1}$ , por otro lado, se tiene que

$$\theta_{t,1} = \text{sen}^{-1} \left( \frac{n_2}{n_1} \text{sen}(\theta_{i,1}) \right)$$

Utilizando la identidad de la resta del seno, tenemos que

$$\text{sen}(\theta_{i,1} - \theta_{t,1}) = \text{sen}(\theta_{i,1}) \cos(\theta_{t,1}) - \text{sen}(\theta_{t,1}) \cos(\theta_{i,1})$$

Recordando que  $\theta_{i,2} = \theta_{t,1}$ , reemplazamos en la ecuación de  $\Delta$

$$\Delta = \frac{d}{\cos(\theta_{t,1})} (\text{sen}(\theta_{i,1})\cos(\theta_{t,1}) - \text{sen}(\theta_{t,1})\cos(\theta_{i,1}))$$

$$\Delta = d\text{sen}(\theta_{i,1}) - \frac{d}{\cos(\theta_{t,1})}\text{sen}(\theta_{t,1})\cos(\theta_{i,1})$$

$$\Delta = d\text{sen}(\theta_{i,1}) - \frac{d}{\cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{n_1}{n_2}\text{sen}(\theta_{i,1})\right)\right)}\frac{n_1}{n_2}\text{sen}(\theta_{i,1})\cos(\theta_{i,1}) \quad (15)$$

La ecuación (7) es la ecuación para el desplazamiento del rayo en función de los datos

Verifiquemos que el rayo que se refleja en la primer cara y el que emerge luego de reflejarse en la segunda, son paralelos.

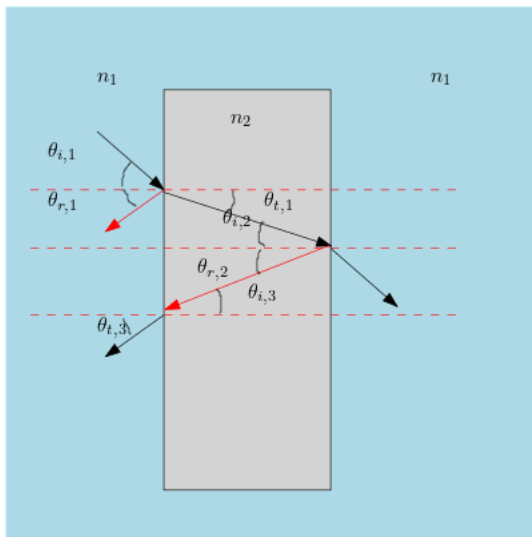


Figura 8: Diagrama del ejercicio

Esto es puramente aplicación de la ley de Snell en cada interfaz.

Observemos que:

1.  $n_1 \text{sen}(\theta_{i,1}) = n_2 \text{sen}(\theta_{t,1})$
2.  $\theta_{i,1} = \theta_{r,1}$
3.  $\theta_{t,1} = \theta_{i,2} = \theta_{r,2} = \theta_{i,3}$
4.  $n_2 \text{sen}(\theta_{i,3}) = n_1 \text{sen}(\theta_{t,3})$

Ahora, como podemos ver en la ecuación (3) el ángulo del rayo transmitido en la primer interfaz es el mismo ángulo con el que se reflejara en la segunda interfaz haciendo que el rayo incidente en la primer interfaz dentro de la lamina producto del rayo reflejado en la segunda (que forma un ángulo  $\theta_{i,3}$  con la normal) tenga el mismo ángulo que el rayo transmitido en la primer interfaz. Por lo que la ecuación (1) se puede ver como

$$n_1 \text{sen}(\theta_{i,1}) = n_2 \text{sen}(\theta_{t,1}) = n_2 \text{sen}(\theta_{i,3})$$

pero teniendo en cuenta la (4)

$$n_1 \text{sen}(\theta_{i,1}) = n_2 \text{sen}(\theta_{i,3}) = n_1 \text{sen}(\theta_{t,3}) \Rightarrow \text{sen}(\theta_{i,1}) = \text{sen}(\theta_{r,1})\text{sen}(\theta_{t,3})$$

Lo que se tiene que el rayo que se refleja en la primer cara y el que emerge luego de reflejarse en la segunda, son paralelos

Si el medio exterior es único: ¿Existe algún ángulo de incidencia tal que produzca reflexión total en la cara interior?

Recordemos que, para que esto suceda se debe dar que  $\frac{n_i}{n_t} > 1$  y el  $\theta_i$  debe ser de tal forma que  $\theta_t \leq \pi/2$ . Entonces, el ángulo de incidencia va a ser el crítico, que esta dado por:

$$\text{sen}(\theta_c) = \frac{n_t}{n_i}$$

### 2.5.1. Rebotando en la caja de cristal

Un rayo incide con ángulo  $\phi$  sobre la superficie horizontal de un cubo de material transparente de índice  $n$  inmerso en aire ( $n_{\text{aire}} \sim 1$ )

- (a) ¿Para que valores de  $\phi$  hay reflexión total en la cara vertical?
- (b) Si  $\phi = 60^\circ$  ¿Cuál es el máximo  $n$  para que no haya reflexión total en la cara vertical? ¿Se puede reflejar totalmente en la cara superior?

Sabemos que siempre que tengamos un rayo de luz viajando entre dos medios se debe cumplir la ley de Snell, en el caso del problema se tiene:

$$\text{sen}(\phi) = n \cdot \text{sen}(\theta)$$

Ahora, nosotros queremos conocer los ángulos de incidencia tal que el ángulo reflejado en la cara vertical se quede encerrado en la caja.

Sabemos que, para que se refleje totalmente debe cumplirse la condición de ángulo crítico en la cara vertical, o sea

$$n \cdot \text{sen}(\gamma) = 1$$

Ahora, también podemos ver que

$$\gamma + \theta = \frac{\pi}{2}$$

Pongamos la ecuación para la condición de ángulo crítico en función de  $\theta$ , esto es

$$n \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = 1$$

Aplicamos la identidad de la resta del seno

$$n \cdot \left[ \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos(\theta) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \text{sen}(\theta) \right] = 1$$

Por lo que

$$n \cdot \cos(\theta) = 1$$

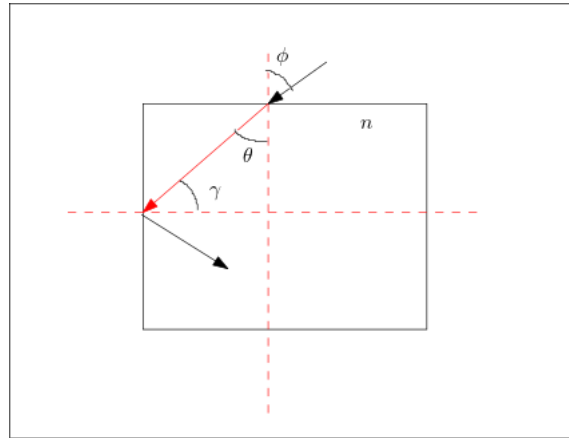


Figura 9: Diagrama del ejercicio

Nos queda un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas dado por

$$\begin{cases} \text{sen}(\phi) = n \cdot \text{sen}(\theta) & (1) \\ 1 = n \cdot \cos(\theta) & (2) \end{cases}$$

Haciendo  $(1)^2 + (2)^2$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} \text{sen}^2(\phi) + 1 &= n^2 \cdot \text{sen}^2(\theta) + n^2 \cdot \cos^2(\theta) \\ \phi &= \text{sen}^{-1}\left(\sqrt{n^2 - 1}\right) \end{aligned} \tag{16}$$

Ahora, si tenemos un ángulo de incidencia  $\phi = 60^\circ$  ¿Cuál sería el mayor  $n$  para que no haya reflexión total?

Notemos que la ecuación (8) nos facilita la respuesta a esta pregunta, ya que nos dice que dado el ángulo de incidencia puedo saber cual será el valor de  $n$  tal que para dicho ángulo haya justo reflexión total.

Por ende, despejando  $n$  de esta ecuación podremos obtener justamente para un dado ángulo cual será el  $n$  necesario para que haya reflexión total. Despejando

$$n = \sqrt{\text{sen}^2(\phi) + 1} \tag{17}$$

Reemplazando el valor del ángulo

$$n = \sqrt{\text{sen}^2(60^\circ) + 1} = 1,32 \tag{18}$$

Por ende, se  $n > 1,32$  siempre habrá reflexión total. Por lo que para que no haya se debe cumplir  $n < 1,32$

### 2.5.2. La fibra óptica

La fibra óptica es un medio empleado habitualmente para la transmisión de redes de datos, que se usa en telecomunicaciones. Básicamente consiste en una hebra muy fina de cierto vidrio (cristal de silicio o materiales plásticos adecuados), de alto índice de refracción (núcleo), cuyo diámetro no excede los  $125\mu\text{m}$ , que se recubre con un material de índice de refracción menor que el del propio núcleo (recubrimiento) con el fin de retener la luz dentro de él, y, que a su vez se protege con una envoltura exterior de material plástico muy flexible. El funcionamiento de estas fibras está basado en el fenómeno de reflexión total sobre los rayos que, ingresando en un extremo, se reflejan sobre las paredes de separación entre el núcleo y el recubrimiento quedando así encapsulados hasta salir por el otro extremo, independientemente que

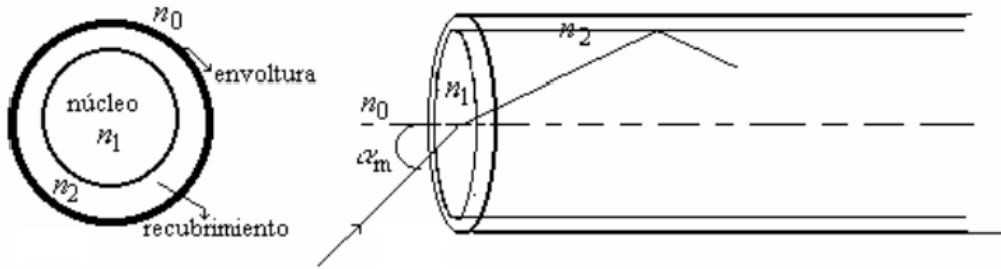


Figura 10: Representación gráfica de la Fibra optica

la fibra siga o no una línea recta. (a) Demuestre que el ángulo del cono de aceptación  $\alpha_m$  que forman todos los rayos ingresando en la fibra, como está indicado en la figura, son reflejados en la superficie de separación entre el núcleo y su recubrimiento es

$$\text{sen}(\alpha_m) = \frac{n_1}{n_0} \sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}$$

siendo  $n_0$ ,  $n_1$  y  $n_2$  los índices de refracción que corresponden al medio exterior, al núcleo de fibra óptica y a su recubrimiento, respectivamente

Este ítem del ejercicio es similar al del rayo encerrado en la caja, solo que en este caso tenemos tres medios distintos involucrados.

El rayo entra desde el medio exterior al núcleo de la fibra con un ángulo de incidencia  $\alpha_m$  llamado *Cono de aceptación*, la ecuación que rige este cambio es

$$n_0 \text{sen}(\alpha_m) = n_1 \text{sen}(\beta) \quad (19)$$

Luego, el rayo sigue viajando dentro del núcleo hasta encontrarse con el recubrimiento del núcleo donde se refleja totalmente, por lo que

$$n_1 \text{sen}(\gamma) = n_2 \quad (20)$$

Podemos escribir esta ecuación en términos de  $\beta$ , pues

$$\beta + \gamma = \frac{\pi}{2} \quad (21)$$

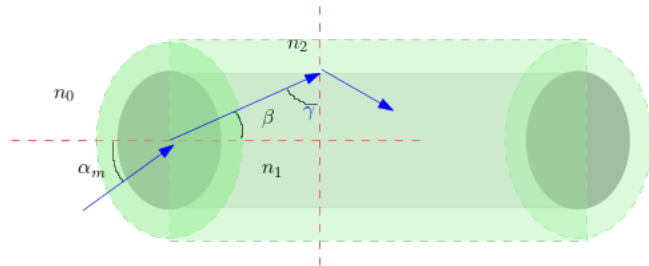


Figura 11: Diagrama del ejercicio

Reemplazando en la ecuación para la reflexión total y usando la identidad de diferencias en el seno, nos queda la siguiente ecuación en función de  $\beta$

$$n_1 \cos(\beta) = n_2 \quad (22)$$

Nos queda el siguiente sistema de ecuaciones con dos incógnitas

$$\begin{cases} n_0 \text{sen}(\alpha_m) = n_1 \text{sen}(\beta) & (i) \\ n_2 = n_1 \cos(\beta) & (ii) \end{cases}$$

Haciendo  $(i)^2 + (ii)^2$ , obtenemos

$$n_0^2 \text{sen}^2(\alpha_m) + n_2^2 = n_1^2 \text{sen}^2(\beta) + n_1^2 \cos^2(\beta)$$

$$n_0^2 \text{sen}^2(\alpha_m) = n_1^2 - n_2^2$$

$$\text{sen}(\alpha_m) = \sqrt{\frac{n_1^2 - n_2^2}{n_0^2}}$$

Este resultado puede reescribirse como

$$\text{sen}(\alpha_m) = \frac{n_1}{n_0} \sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2} \quad (23)$$

(b) Como el cono de aceptación depende del índice que rodea a la fibra en extremo de entrada, suele emplearse una magnitud denominada apertura numérica y que se define como

$$AN = n_0 \cdot \text{sen}(\alpha_m)$$

Calcule la apertura numérica correspondiente a una fibra cuyo núcleo tiene un índice de refracción de 1,66 y el correspondiente a su recubrimiento es 1,4. Para estos valores, ¿Cuál es el ángulo de aceptación si la luz proviene del aire? ¿Y si proviene del agua?

Este ejercicio es meramente reemplazar el resultado obtenido anteriormente para  $\alpha_m$  en la ecuación de la apertura numérica

$$AN = n_0 \cdot \text{sen}(\alpha_m) = n_0 \frac{n_1}{n_0} \sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}$$

$$AN = n_1 \sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2} \quad (24)$$

Nos queda entonces la una ecuación para la apertura numérica que no depende del medio exterior de donde proviene el rayo de luz, solo depende de el índice de refracción de el núcleo y del recubrimiento. En el gráfico para  $\alpha_m$ , se ve

Reemplazando los valores indicados en el enunciado se tiene

$$AN = 1,66 \sqrt{1 - \left(\frac{1,4}{1,66}\right)^2} = 0,89$$

Luego, teniendo esto en cuenta, podemos calcular a partir de la ecuación de la apertura numérica cual sera el ángulo del cono de aceptación proviniendo de distintos medios

$$\alpha_m = \text{sen}^{-1} \left( \frac{AN}{n_0} \right) \quad (25)$$

1. Provieniendo del aire ( $n_0 = 1$ ):

$$\alpha_m = 62,87^\circ$$

2. Provieniendo del agua ( $n_0 = 1,33$ ):

$$\alpha_m = 42^\circ$$

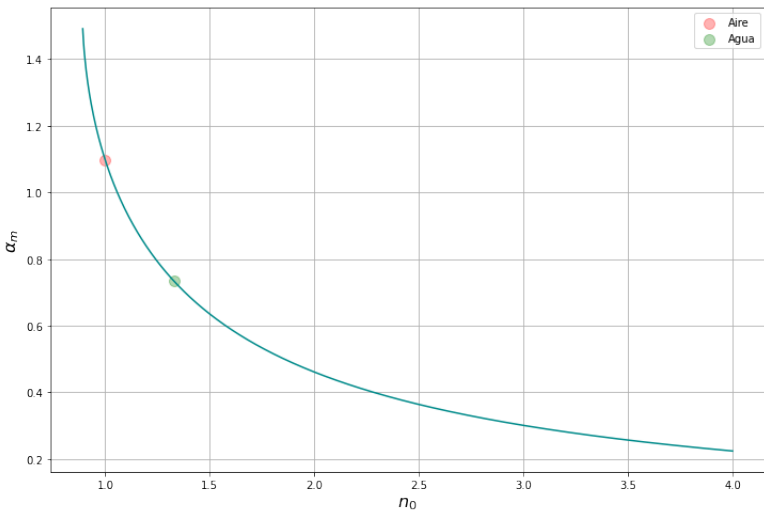


Figura 12: Diagrama del ejercicio

como el ángulo del cono de apertura disminuye a medida que aumenta el medio exterior es mas denso, esto teniendo un mismo cable, es decir una misma apertura numérica. (c) ¿Qué rango de valores debería tener el índice de refracción del recubrimiento de un núcleo cuyo índice es 1,66 para que todo rayo que incida desde el aire quede atrapado dentro de la fibra?

Ya de entrada, sabemos que el índice de refracción de un material debe ser mayor que 1, siendo 1 el índice de refracción del vacío (y en particular, el del aire es muy cercano y por eso suele aproximarse por dicho valor).

Luego, para que se cumpla reflexión total dentro del núcleo, se debe cumplir

$$\frac{n_{nucleo}}{n_{recub}} > 1 \quad (26)$$

Teniendo un valor  $n_{nucleo} = 1,66$

Entonces, el índice del recubrimiento debe estar dentro del siguiente rango

$$1 \leq n_{recub} < 1,66 \quad (27)$$

Con esto también podemos hacer gráficos para las aperturas numéricas posibles y los ángulos de cono de apertura para cada índice y en particular incidiendo desde aire ( $n_0 \sim 1$ )

Esto es

$$AN(n_{recub}) = 1,66 \sqrt{1 - \left(\frac{n_{recub}}{1,66}\right)^2} \tag{28}$$

Y para el ángulo  $\alpha_m$

$$\alpha_m(n_{recub}) = \text{sen}^{-1}(AN(n_{recub})) \tag{29}$$

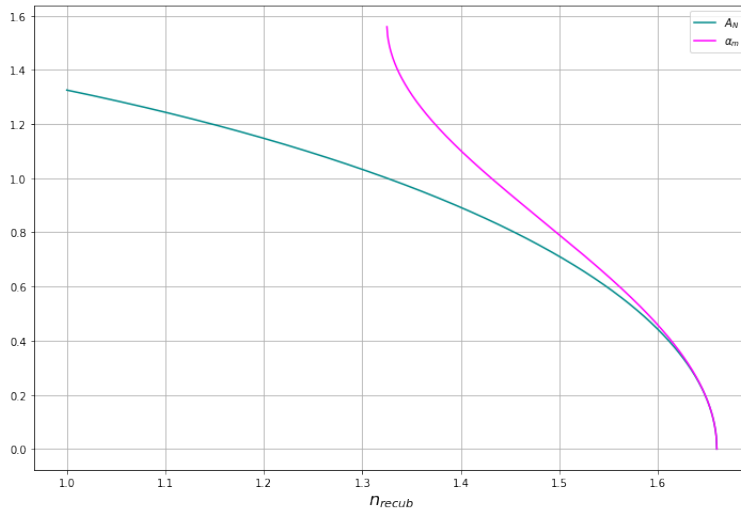


Figura 13: Comparación  $AN(n_{recub})-\alpha_m(n_{recub})$

### 3. Sistemas Dispersores

Partamos del modelo que describe a la luz como un flujo de energía dentro del espectro visible y que la dirección en la cual se propaga este rayo es en la dirección de  $\vec{\kappa}$ .

Sabemos que por definición la velocidad de la luz en un medio particular va a estar dada por:

$$v_m = \frac{c}{n}$$

Ahora bien, las partículas de un medio *dispersan* la luz.

Es decir que la velocidad de la luz en un determinado medio *depende de la frecuencia de la onda*, y por lo tanto de *la longitud de onda* y como la velocidad de la luz  $c$  es una constante, lo que varía con la longitud de onda ( $\lambda$ ) es el **índice de refracción**( $n$ ).

En general, *el índice disminuye a medida que aumenta la longitud de onda*, es decir, si hacemos viajar luz por un determinado material, la luz roja viaja más rápido que la luz azul.

Es decir, si suponemos  $n_i = cte \forall \lambda$  y  $n_t = n_t(\lambda)$

$$\text{sen}(\theta_t) = \frac{n_i}{n_t = n_t(\lambda)} \text{sen}(\theta_i) \tag{30}$$

Dando como resultado que

$$\theta_t^{\text{azul}} < \theta_t^{\text{amarillo}} < \theta_t^{\text{rojo}} \tag{31}$$

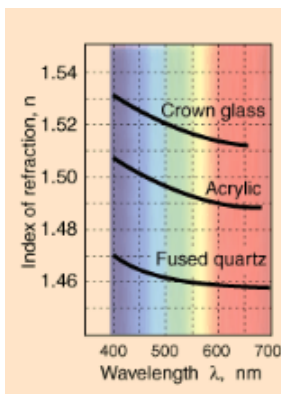


Figura 14:  $n(\lambda)$  para algunos materiales

El tema es que, si la dispersión es muy pequeña estas diferencias **no** se observan.

Existen dispositivos que permiten amplificar este efecto, a estos se les llama **Dispersores de Luz**. El más conocido de estos dispositivos es un artefacto utilizado por Newton el cual es el **Prisma**.

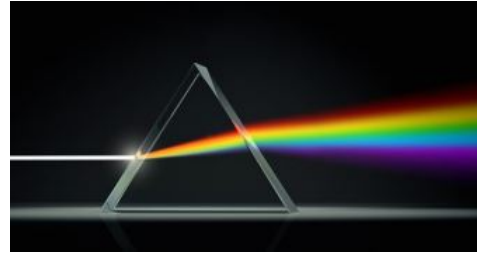


Figura 15: Imagen de un prisma haciendo su trabajo

Los *prismas dispersivos* son cuerpo delimitados por dos caras no paralelas planas usados para descomponer la luz en el espectro visible. La luz blanca que entra al prisma es una mezcla de diferentes longitudes de onda y cada una se desvía de manera diferente.

Recordemos ahora que pasa con un rayo de luz incidente en un medio. El rayo de luz incide con un cierto ángulo  $\theta_{i1}$ , refractándose y transmitiéndose así con un ángulo  $\theta_{t1}$  en el segundo medio.

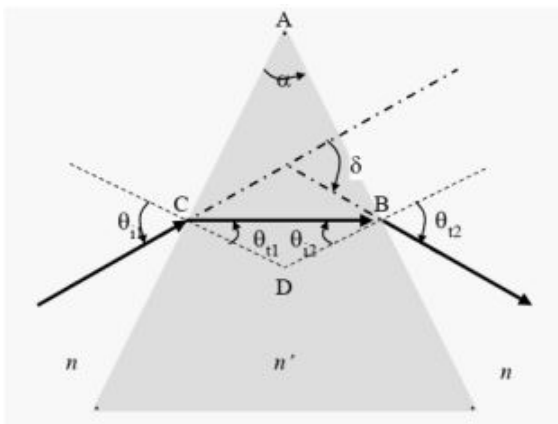


Figura 16: Imagen de un prisma haciendo su trabajo

Ahora, el prisma tiene dos caras y no solo eso, tiene una serie de ángulos que son la clave de lo que pasa físicamente con el rayo incidente.

Miremos la figura 16. Vemos que el rayo que viaja en un medio, cuyo coeficiente de refracción es  $n$ , incide en la primer cara con el ángulo  $\theta_{i1}$ , se transmite con  $\theta_{t1}$  dentro del prisma, cuyo coeficiente de refracción es  $n'$ . Luego, este mismo rayo incide en la segunda cara con el ángulo  $\theta_{i2}$  transmitiéndose con un ángulo  $\theta_{t2}$  respecto de la normal de la segunda cara.

Podemos definir el ángulo  $\alpha$  como el *ángulo del prisma* y al ángulo  $\delta$  como el *ángulo de desviación*, es decir, cuanto se desvía el ángulo incidente según su trayectoria original sobre antes de incidir en la primer cara el prisma.

Además, supongamos que  $n' > n$  y tomemos las siguientes convenciones.

Convenciones:

1. Todo ángulo se mide desde la normal al rayo
2. Los ángulos serán *positivos*  $\iff$  Si tiene sentido antihorario (En el caso de la imagen:  $\theta_{i1}$  y  $\theta_{t1}$ , recordar que se mide el ángulo respecto la normal a la superficie).
3. Los ángulos serán *negativos*  $\iff$  Si tiene sentido horario (En el caso de la imagen:  $\theta_{i2}$  o  $\delta$ , recordar que se mide el ángulo respecto la normal a la superficie).

Calculemos quien es  $\delta$ :

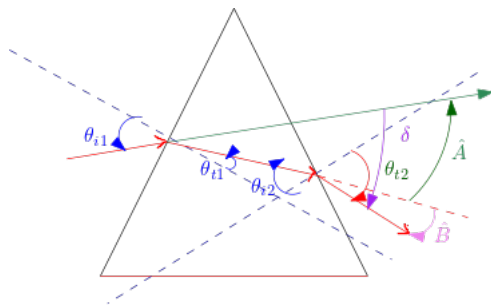


Figura 17: Caso Hipotetico para calcular  $\delta$

Observemos la figura 17. Notemos que el modulo de delta esta dado por la suma

$$|\delta| = |\hat{A}| + |\hat{B}| \tag{32}$$

Guiándonos según las convenciones,  $\delta$  se mide en sentido horario, por lo que es negativo, al igual que  $\hat{B}$ , en cambio,  $\hat{A}$  es antihorario, por lo que es positivo, por lo tanto:

$$-\delta = \hat{A} - \hat{B} \tag{33}$$

Por otro lado:

$$B = \theta_{t2} - \theta_{i2} \tag{34}$$

y

$$A = \theta_{i1} - \theta_{t1} \tag{35}$$

Por lo tanto, tenemos la siguiente ecuación para  $\delta$

$$\delta = \hat{B} - \hat{A} = (\theta_{t2} - \theta_{i2}) - (\theta_{i1} - \theta_{t1}) = (\theta_{t2} - \theta_{i2}) + (\theta_{t1} - \theta_{i1}) \tag{36}$$

Miremos con detenimiento la figura 16.

Notemos que el polígono  $ABCD$  son dos triángulos, luego (como podemos ver en la figura 18)

$$|\theta_{t1}| + |\theta_{i2}| + 180 - \alpha = 180$$

$$\iff \alpha = |\theta_{t1}| + |\theta_{i2}| \iff \alpha = \theta_{t1} - \theta_{i2}$$

Y por lo tanto, reemplazando el valor de  $\alpha$  en la ecuación de delta se obtiene

$$\delta = \alpha + \theta_{t2} - \theta_{i1} \tag{37}$$

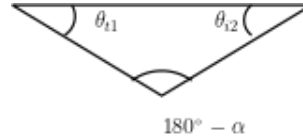


Figura 18: Triangulo CDB

Ahora, solo nos falta aplicar la ley de Snell para calcular  $\theta_{t2}$  para así obtener una fórmula para  $\delta(\theta_{i1}, \alpha)$ .

Si hacemos eso nos queda la siguiente ecuación:

$$\delta(\theta_{i1}, \alpha) = \alpha - \theta_{i1} + \arcsen \left[ \frac{-\sen \alpha}{n} \sqrt{(n')^2 - n^2 \sen^2 \theta_{i1}} + \cos \alpha \sen \theta_{i1} \right] \tag{38}$$

Esta es la ecuación más general, veamos como varía según el medio en el cual está sumergido el prisma, donde  $n_i = 1$  es el aire.

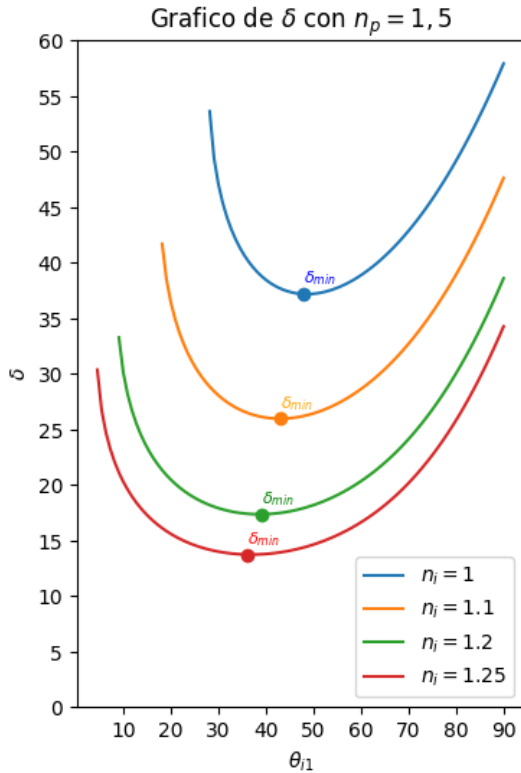


Figura 19: Gráfico de  $\delta$  para distintos valores de  $n_i$  de un mismo prisma de  $\alpha = \frac{\pi}{3}$  y  $n_p = 1,5$

En la figura 19, podemos ver como varía el ángulo de desviación. Y no solo eso, sino que este tiene un mínimo.

Fisicamente, este mínimo implica que el prisma es un triángulo isoceloso, es decir, que  $|\theta_{i1}| = |\theta_{t2}|$ , o sea que *el rayo atraviesa el prisma paralelo a la base*.

Ahora, notemos que si pasa esto, se tiene que  $|\theta_{i2}| = |\theta_{t1}|$  donde, si reemplazamos este resultado en la ecuación 37 para obtener  $\delta$ , se llega a una ecuación para el  $\delta_{min}$

$$\delta_{min} = 2 \cdot \arcsen \left[ \frac{n_p}{n_i} \cdot \sen \left( \frac{\alpha}{2} \right) \right] - \alpha \tag{39}$$

Ahora, imaginemos que el prisma es muy delgado y por lo tanto  $\alpha$  es muy pequeño. Con esta aproximación podemos tomar  $\sen x \sim x$ , y aplicando esta a la ecuación del  $\delta_{min}$  se tiene que:

$$\begin{aligned} \delta_{min} &\sim 2 \cdot \arcsen \left[ \frac{n_p}{n_i} \cdot \frac{\alpha}{2} \right] - \alpha \sim \\ &\sim 2 \cdot \frac{n_p}{n_i} \cdot \frac{\alpha}{2} - \alpha \end{aligned}$$

Quedando el  $\delta_{min}$  para prismas delgados como

$$\delta_{min} \sim \alpha \left( \frac{n_p}{n_i} - 1 \right) \tag{40}$$



Luego, si solo incidimos desde el aire la ecuación para el  $\delta_{min}$  es:

$$\delta_{min} \sim \alpha (n_p - 1) \tag{41}$$

Luego, como el índice de refracción depende de la velocidad de la onda (y por ende de la longitud de onda) como

$$n = \frac{c}{v(\lambda)}$$

Se tiene que

$$\delta_{min}(\lambda) \sim \alpha \left( \frac{c}{v_p(\lambda)} - 1 \right) \tag{42}$$

#### 4. Descripción Geométrica - Dioptras y lentes

Hasta ahora nos enfocábamos en un único rayo de luz entrando sobre una interfaz divisora de dos medios, en particular, estas interfaces eran planas.

Gracias a el estudio de estas situaciones llegamos a la ecuación de Snell y a distinguir que dependiendo de ciertas geometrías podíamos separar un rayo de luz blanca en todo el rango espectral del visible.

Ahora nos queda aplicar el hecho de que una fuente de luz emana rayos en todas las direcciones posibles de la fuente, en particular, entendamos como fuente a un punto esférico que manda rayos en sentido radial.



Figura 20: Fuente de Luz Puntual

##### 4.1. Dioptras Planas

Las dioptras planas no son mas que interfaces entre medios los cuales tienen forma plana.

Ahora, imaginemos un objeto frente a esta dioptra. Sabemos que la luz que refleja sobre este objeto viaja en el espacio, luego, esta luz puede toparse con la dioptra viajando desde el objeto a la dioptra y el rayo se refractara según sea el medio siguiente a la dioptra (por ejemplo, la imagen del pez que viene desde la pecera o la que vea el pez dentro de la pecera).

Como la dioptra separa dos medios y sabemos, por Snell, que la onda transmitida se refracta. También, sabemos que lo hará de forma diferente según como sea la relación entre los índices de refracción de los medios.

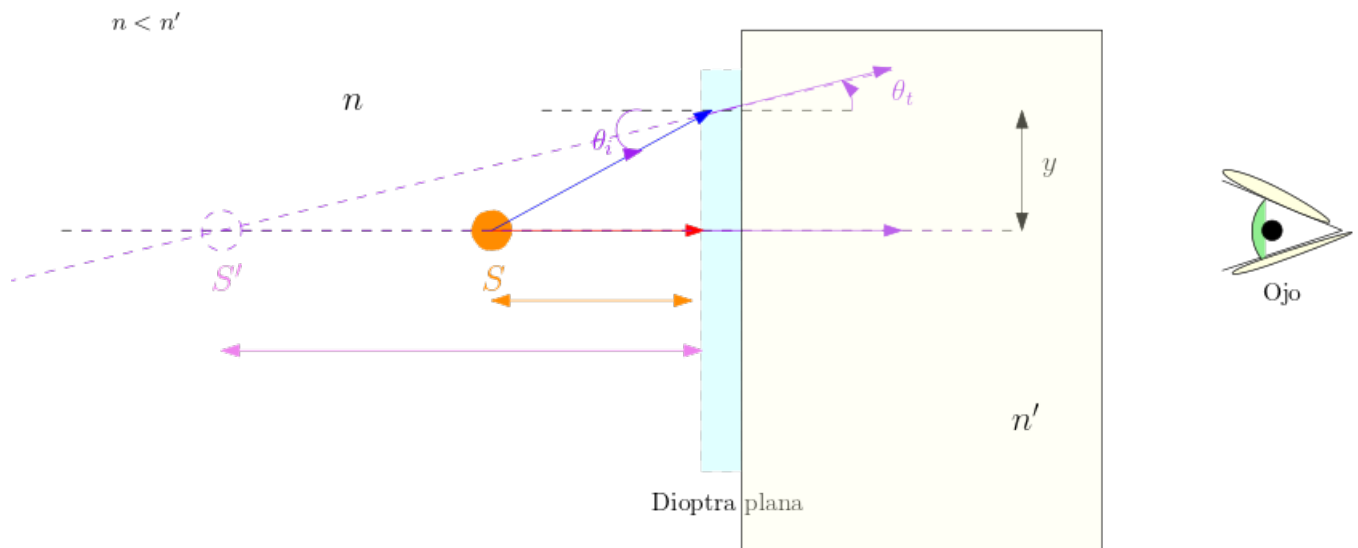


Figura 21: Dioptra que separa dos medios donde el índice del segundo medio es mayor

Supongamos que tenemos un objeto ( $S$ ) a la izquierda de la dioptra el cual esta sobre un medio de índice de refracción  $n$  y nosotros miramos al objeto desde un medio de índice  $n'$  a través de la dioptra.

Del objeto salen distintos rayos. El que se "choca" con la dioptra en sentido paralelo a la normal de esta se transmitirá con  $\theta_t = 0$  (es decir, sale paralelo). Por otro lado, cualquier otro rayo que no sea paralelo a la normal esta sometido a Snell, por lo que pueden pasar dos cosas:

1.  $n < n' \Rightarrow$  El ángulo transmitido se acerca a la normal de la dioptra
2.  $n > n' \Rightarrow$  El ángulo transmitido se aleja a la normal de la dioptra

La pregunta que debemos hacernos ahora es:

Según como llegan los rayos a mi ojo: ¿Donde veo que esta el objeto? o sea ¿Donde se forma la imagen? ¿Lo que veo es realmente el objeto o es una virtualización del objeto?

Debemos aplicar Snell, pero con un poco de maña, ya que no queremos usar precisamente los ángulos porque es mucho mas fácil medir la distancia del objeto a la dioptra ( $S$  en la figura 21) y la altura de donde viene la luz ( $y$  en la figura 21).

Notemos que, si el objeto esta muy, muy lejos (o simplemente un punto del objeto) el ángulo puede ser muy pequeño, al punto que el triangulo rectangulo que forme pueden confundirse la longitud de la hipotenusa con su proyección junto al Cateto adyacente.

Según esto, podríamos aproximar los senos utilizados en Snell por tangentes (por definición de seno y tangente)

$$\text{sen } \alpha = \frac{CO}{R} \underset{R \rightarrow CA}{\approx} \frac{CO}{CA} = \tan \alpha$$

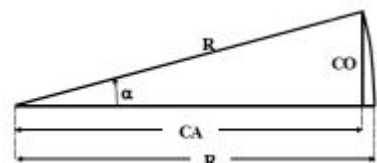


Figura 22: Triangulo que refleja la idea de la aproximación paraxial

Luego, la definición de Snell nos queda:

$$n \tan \theta_i = n' \tan \theta_t \tag{43}$$

Luego, viendo la figura 21 podemos ver que

$$n \tan \theta_i = n' \tan \theta_t \iff n \frac{y}{S} = n' \frac{y}{S'}$$

Lo que, simplificando las  $y$  y despejando  $S'$  obtenemos:

$$S' = \frac{n'}{n} S \tag{44}$$

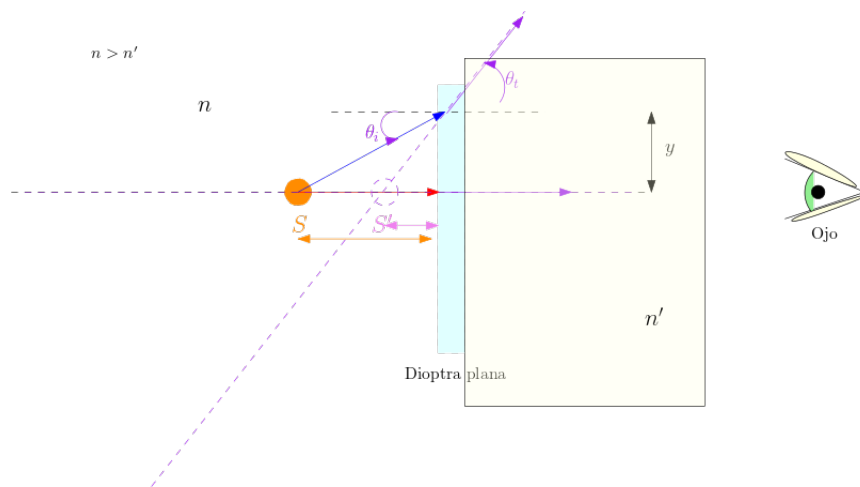


Figura 23: Dioptra que separa dos medios donde el índice del segundo medio es menor

La ecuación 44 nos da la ubicación de la *imagen Virtual*, la cual se ubica a una distancia  $S'$  relativa a la Dioptra. La imagen virtual, es la imagen formada por la prolongación de los rayos de salida, osea la prolongación de los rayos transmitidos. Además, podemos notar que (Este segundo caso puede verse en la figura 23):

- Si  $n < n' \Rightarrow \frac{n'}{n} > 1 \Rightarrow S' > S$
- Si  $n > n' \Rightarrow \frac{n'}{n} < 1 \Rightarrow S' < S$

#### 4.2. Dioptras Esfericas

Nos toca hablar *la crem de la crem*, de convenciones pesadas, de convección, convergencia y del principio de porque una lente funciona como funciona, nos toca hablar de *Dioptras esféricas*.

Las dioptras esféricas siguen siendo interfases que separan dos medios, sin embargo tiene la particularidad geométrica de la esfera. O sea, la física en si no cambia, se debe seguir aplicando la ley de Snell, pero al cambiar la geometría, también cambia el hacia donde irán a parar los rayos de luz.

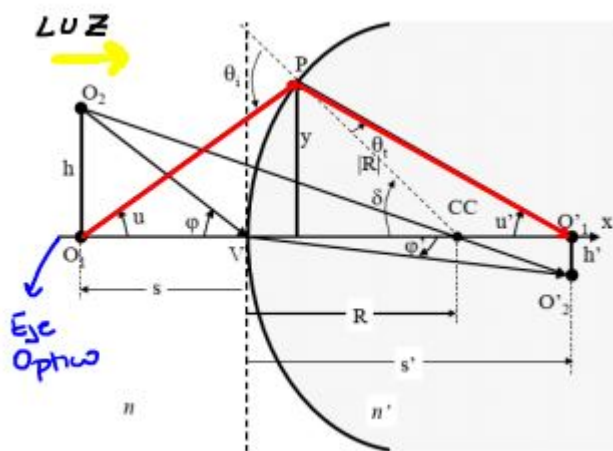


Figura 24: Dioptra Esferica

Tenemos a nuestra izquierda en la figura 24 una dioptra esférica (sacada de un apunte de Maria Luz Martines, que a su vez lo saco del hetch).

Notemos que tenemos dos puntos que nos limitan la altura de un objeto extenso, los puntos son los objetos  $O_1$  y  $O_2$ . Al objeto  $O_1$  se lo denomina *objeto axial*, mientras que al objeto  $O_2$  se le da el nombre de *objeto extra axial*. Estos, a su vez tienen sus imágenes  $O_1'$  y  $O_2'$  donde a  $O_1'$  se la conoce como *imagen axial* y a  $O_2'$  como *imagen extra axial*.

De ambos objetos tendremos rayos de luz que atravesaran la dioptra, el tema ahora es ¿Cuales son los que nos sirven a nosotros a la hora de calcular cosas?

Antes de seguir, tomemos unas cuantas convenciones, las cuales debemos tener presentes, ya que *las ecuaciones que encontremos dependerán de estas convenciones y, por lo tanto, solo serán validas utilizando estas convenciones*.

#### Convenciones de Signos:

- 1) La luz incide de Izquierda a Derecha.
- 2) Las distancias se miden desde *el vértice a la dioptra* o desde *el eje óptico*
  - 2a) Toda distancia medida en el mismo sentido de la luz es *positiva* y toda aquella que sea antiparalela sera *negativa*.
  - 2b) Toda distancia medida por sobre el eje óptico es *positivo* y por debajo *negativo*.
- 3) Los ángulos se miden *positivos* si son *antihorario* y *negativos* si son *horario*.
  - 3a) Se miden desde el eje óptico al rayo.
  - 3b) Desde la normal al rayo.
  - 3c) Desde la dioptra al rayo.

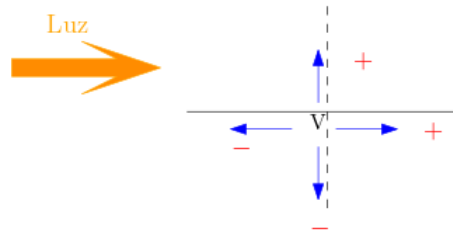


Figura 25: Esquema de Signos

Teniendo en cuenta esta convención de signos, busquemos describir el camino óptico que realizan los rayos, aprovechando la aproximación paraxial y en términos de los datos, es decir  $R, n, n', S$  y  $S'$ .

Cada rayo de luz que llega a la dioptra se transmite en el segundo medio según la ley de Snell 4, la cual según la aproximación paraxial 43 se puede aproximar como

$$n\theta_i \sim n'\theta_t \quad (45)$$

Ahora, con mucho amor y cariño debemos ver quienes son  $\theta_i$  y  $\theta_t$ . Para esto vamos a utilizar un poco de trigonometría.

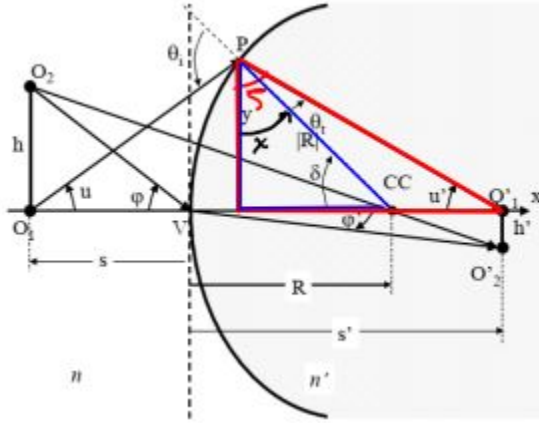


Figura 26: Esquema de la dioptra para calcular  $\theta_t$

Calculemos primero  $\theta_t$ . Miremos los triángulos rectángulos rojo y azul en la figura 25. Podemos distinguir que, en modulo podemos calcular según el triángulo rojo.

$$|u'| + |\xi| = \frac{\pi}{2} \quad (46)$$

y según el azul

$$|\delta| + |\chi| = \frac{\pi}{2} \quad (47)$$

Ahora, veamos como son los signos para cada ángulo según la convención enumerada anteriormente.

$u'$  se mide desde el eje óptico hacia el rayo transmitido en sentido horario, por lo que  $u' \rightarrow -$

Por otro lado,  $\xi$  se mide hacia el rayo desde la pared del triángulo, la cual es paralela a la línea del eje que forma el vértice, por lo tanto se mide en sentido antihorario, en conclusión:  $\xi \rightarrow +$ .

Además, notemos que

$$\xi = \chi + \theta_t \quad (48)$$

Reemplazando 48 en 46 y teniendo en cuenta los signos, se obtiene

$$\chi + \theta_t - u' = \frac{\pi}{2} \quad (49)$$

Tenemos un ángulo más que es representativo y es  $\delta$ . Este ángulo es la posición angular del punto P respecto de eje óptico desde CC. Este puede medirse según la 47. Ahora, pensemos como son los signos de  $\chi$  y  $\delta$ .  $\chi$  se mide desde el cateto del triángulo que es paralelo al eje del vertice hacia el rayo (aunque solo llegue a la normal), por lo que se mide en sentido antiorario y por lo tanto  $\chi \rightarrow +$ , por otro lado,  $\delta$  se mide desde el eje óptico hacia la normal, por lo que es en sentido horario y por ende  $\delta \rightarrow -$ .

Ahora, utilizando 47, despejamos  $\chi$  que teniendo en cuenta los signos nos queda

$$\chi = \frac{\pi}{2} + \delta \quad (50)$$

Reemplazando en 49 podemos despejar  $\theta_t$  quedando así

$$\theta_t = u' - \delta \quad (51)$$

De igual manera, podemos probar que

$$\theta_i = u - \delta \quad (52)$$

Si reemplazamos las 51 y 52 en la solución 45 nos queda

$$n(u - \delta) = n'(u' - \delta) \quad (53)$$

Ahora, pongamos estos ángulos en función de longitudes medibles.

A  $u$  podríamos medirlo en función de la distancia del objeto al vértice ( $S$ ) y la altura del punto en la cual el rayo choca con la dioptra medido respecto el eje óptico (en la figura 26 es el valor  $y$ ), esto es, teniendo en cuenta la convención de signos

$$u = \frac{y}{-S} \quad (54)$$

Por otro lado, el ángulo  $\delta$  puede calcularse con el radio de la dioptra y la altura de  $P$  respecto al eje optico. De nuevo, teniendo en cuenta la convención de signos se tiene:

$$\delta = \frac{y}{-R} \tag{55}$$

Por ultimo,  $u'$  es similar a  $u$  solo que teniendo en cuenta la distancia imagen  $S'$ , quedando asi

$$u' = \frac{y}{-S'} \tag{56}$$

Reemplacemos 54, 55 y 56 en 53

$$n(u - \delta) = n'(u' - \delta) \iff n \left( \frac{y}{-S} - \left( \frac{y}{-R} \right) \right) = n' \left( \frac{y}{-S'} - \left( \frac{y}{-R} \right) \right)$$

$$ny \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{S} \right) = n'y \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{S'} \right)$$

Notar que nos independizamos de  $y$  que es la altura del punto en donde choca el rayo... Osea, que nos independizamos de esa altura, y esto va a valer para todos los rayos al cual apliquemos la ecuación.

Por ultimo, obtenemos la ecuación

$$\frac{n'}{S'} - \frac{n}{S} = \frac{n' - n}{R} = \phi \tag{57}$$

A la ecuación 57 se la conoce con el nombre de *ecuación de la Dioptra* o *Potencia de la Dioptra*, su unidad es de  $[\phi] = \frac{1}{m}$  a la cual se la denomina con el nombre de *dioptrías*.

Notemos la fuerza que tiene esta ecuación, si yo conozco los índices de refracción de los medios, el radio de curvatura y la distancia objeto ( $S$ ) voy a poder conocer la distancia imagen ( $S'$ ) (o viceversa).

**OJO!:** Esta ecuación depende de la convención de signos utilizada, por lo que es muy importante recordar las convenciones de signos anteriormente pactadas. Además, no toda la bibliografía usa estas ecuaciones, por lo general se obtiene una ecuación similar pero con distintos signos, por lo que hay que tener cuidado con eso.

### 4.2.1. Análisis de la ecuación de la dioptra

¿Puede estar un objeto a una distancia infinita respecto de la dioptra? Claramente si, donde por infinita queremos decir muy lejos. Ahora, que esta distancia sea infinita significa que  $S \rightarrow \infty$ .

En particular, como tomamos por convención que el objeto se ubica a la izquierda, entendemos que esta distancia es negativa, por ende  $S \rightarrow -\infty$ . ¿Qué pasa cuando aplicamos esto a la ecuación 57?

$$\frac{n'}{S'} - \frac{n}{S} \underset{\substack{S \rightarrow -\infty \\ \frac{n}{S} \rightarrow 0}}{=} \frac{n'}{S'} = \frac{n' - n}{R}$$

Luego, definimos

$$s_{\rightarrow -\infty} S' = \frac{n'}{\phi} = f'$$

A la distancia  $f'$  se la llama *distancia focal imagen* y representa a la imagen que forma un objeto que esta ubicado infinitamente lejos de la dioptra. Los rayos de un objeto ubicado a una distancia infinita de la dioptra tienen la particularidad de llegar todos paralelos a la dioptra como se aprecia en la figura 28

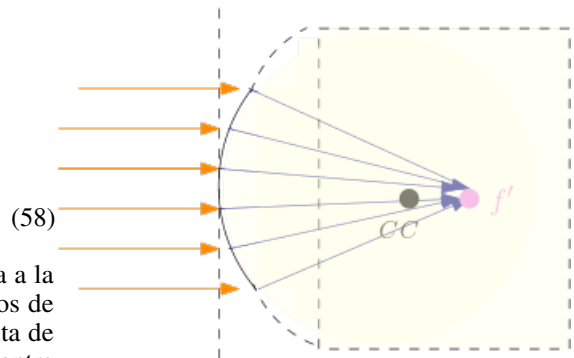


Figura 27: Si el objeto esta infinitamente lejos, los rayos llegan paralelos

Entonces: ¿Qué pasa a la inversa? Osea, ¿Donde debo poner a mi objeto para que los haces de luz salgan paralelos de la dioptra?  
 No es difícil ver que lo que estoy pidiendo es que la imagen se forme en el infinito, por ente el proceso es análogo

$$\frac{n'}{S'} - \frac{n}{S} \underset{\substack{S' \rightarrow -\infty \\ \frac{n'}{S'} \rightarrow 0}}{=} = \frac{-n}{S} = \frac{n' - n}{R}$$

Luego, definimos

$$\underset{S' \rightarrow -\infty}{S} = \frac{-n}{\phi} = f \tag{59}$$

En este caso  $f$  es la *distancia focal objeto*

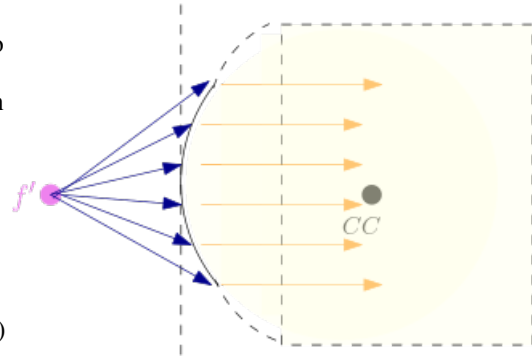


Figura 28: Si la imagen se forma infinitamente lejos

Luego, para completar la ecuación de la dioptra podemos resaltar el hecho de la existencia de las distancias focales, donde podremos reescribir a la 57 como:

$$\phi = \frac{n'}{S'} - \frac{n}{S} = \frac{n' - n}{R} = \frac{-n}{f} = \frac{n'}{f'} \tag{60}$$

Ahora, hablemos un poco de **el signo de  $\phi$** .

a)  $\phi > 0$ : *Dioptra convergente*

Viendo la ecuación 60, podemos ver que para que esto ocurra deben pasar una de las siguientes situaciones

a.1) Convexa ( $R > 0$ ):  $n' > n \Rightarrow f' > 0$  y  $f < 0$

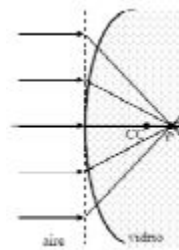


Figura 29: Dioptra convergente con lente Convexa

a.2) Cóncava ( $R < 0$ ):  $n' < n$

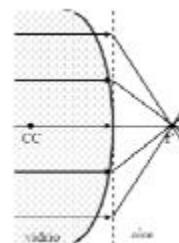


Figura 30: Dioptra convergente con lente Concava

b)  $\phi < 0$ : *Dioptra Divergente*

Viendo la ecuación 60, podemos ver que para que esto ocurra deben pasar una de las siguientes situaciones

b.1) Convexa ( $R > 0$ ):  $n' < n \Rightarrow f' < 0$  y  $f > 0$

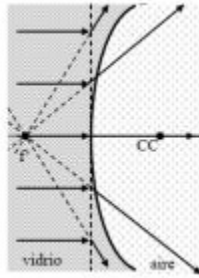


Figura 31: Dioptra divergente con lente Convexa

b.2) Cóncava ( $R < 0$ ):  $n' > n$

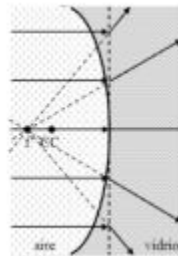


Figura 32: Dioptra divergente con lente Cóncava

Ahora, pensemos que pasa con la imagen de un objeto extra axial, es decir, un objeto que no está sobre el eje óptico. ¿Donde va a formar imagen este punto?

La imagen se forma en el punto donde se encuentran todos los rayos que se transmiten e interceptan, esta es la clave. Con dos rayos nos basta ¿Pero cuáles son los más fáciles de medir?

Sabemos que de la fuente salen infinitos rayos, luego, por Snell, sabemos que si los medios son distintos entonces el rayo incidente se desviará respecto al transmitido.

Como del objeto salen  $n$  rayos hay uno que va a tener la particularidad de viajar en línea con el Eje óptico, es decir, paralelo al eje óptico y luego al pasar la dioptra se va a desviar (rayo rojo en la figura 33). Así como se desvía, en algún momento pasará por el foco imagen ubicado en algún lugar del eje óptico (dependiendo si la dioptra es convergente o divergente).

Por otro lado, tendremos otro rayo que sale del objeto de forma tal que se cruzará con el foco objeto, luego llega a la dioptra y este saldrá paralelo al eje óptico (rayo azul en la figura 33). En algún momento estos dos rayos mencionados se cruzarán y estos van a dar lugar a la ubicación del objeto axial imagen.

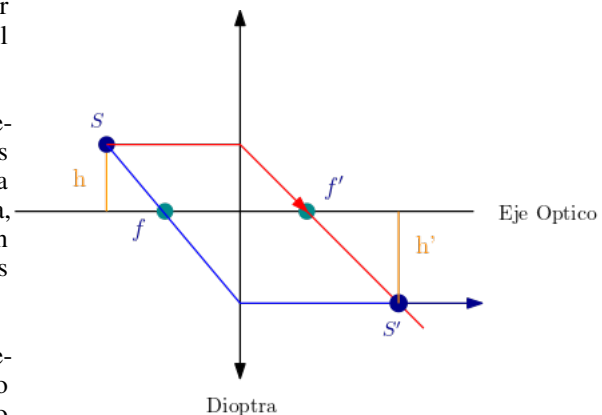
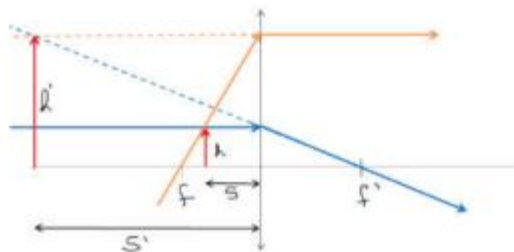


Figura 33: Esquema de rayos para dioptra convergente

Notar, que en la figura 33 el objeto  $S$  se encuentra por detrás del foco, esto producirá una imagen *invertida, disminuida y real*, donde por **imagen real** entendemos a la imagen formada por la convergencia de los rayos transmitidos.

Por otra parte, si ponemos un objeto por delante del foco, pasa lo que se aprecia en la figura 34. El rayo que pasa por el foco objeto sale paralelo y el que sale del objeto paralelo al eje y se refracta en la dioptra hacia el foco imagen tendrán cada uno una proyección las cuales se cortan por detrás del foco objeto, formando así una imagen *directa, aumentada y virtual*, donde en este caso, por **imagen virtual** se entiende a la imagen formada por la prolongación de los rayos transmitidos, por lo que  $S'$  no tiene energía neta.



¿Cómo calculamos los aumentos?

Figura 34: Esquema de rayos para dioptra convergente

Para hacer un calculo del aumento podemos tomar como ejemplo la situación marcada en la imagen 35.

En esta, puede observarse que con simple trigonometría podemos calcular los valores de  $h$  y  $h'$  que son las posiciones relativas al eje óptico del objeto y la imagen.

Notemos que

$$n\theta_i = n'\theta_t$$

Luego, podemos escribir a  $\theta_i$  y  $\theta_t$  en función de  $h$ ,  $h'$ ,  $S$  y  $S'$  como sigue

$$n \frac{h}{S} = n' \frac{h'}{S'}$$

El aumento es *el cociente entre  $h'$  y  $h$* . Por lo que, se define como el aumento a:

$$m = \frac{h'}{h} = \frac{nS'}{n'S} \tag{61}$$

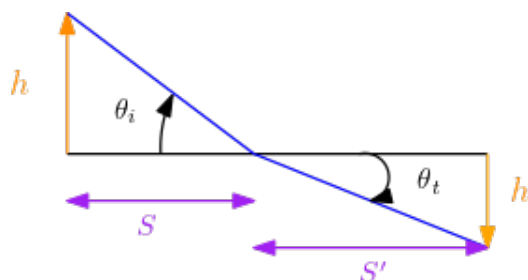


Figura 35: Esquema de rayos para calcular el aumento

Con la ecuación 61 podemos calcular el aumento, que es la relación entre las alturas del objeto para axial y la imagen paraxial formada, ya sea por la convergencia de los rayos (imagen real) o por la convergencia de las prolongaciones de los rayos (imagen virtual).

Podemos distinguir para esta ecuación las siguientes posibilidades.

- a) El signo de  $m$  nos dirá si a imagen es invertida o directa, siendo el caso que que.
  - $m > 0$  implica que ambas alturas tienen igual signo, por lo que, la imagen sera *Directa*
  - Por lo contrario,  $m < 0$  nos indica que la imagen objeto tiene el signo contrario a la imagen respecto al eje óptico, por lo que estará *invertida*.
- b) Luego, como tenemos relación entre alturas, si  $|m|$  es mayor o menor que uno nos dirá si la imagen es aumentada o disminuida.
  - $|m| > 1$  indica que  $h' > h$  por lo que la imagen es *aumentada*.
  - $|m| < 1$  indica que  $h' < h$  por lo que la imagen es *disminuida*.

Por ultimo, hagamos una observación y es el hecho de que *se puede obtener la ecuación de dioptras planas como resultado de la potencia de la dioptra esférica*.

Notemos que si hacemos tender a infinito  $R$  en la 60 (lo que es aproximar a una dioptra plana) tenemos que

$$\phi = \frac{n'}{S'} - \frac{n}{S} = \frac{n' - n}{\underbrace{R}_{\substack{\rightarrow \infty \\ \rightarrow 0}}} = 0$$

Donde, despejando re-obtenemos 44.



## 5. Lentes

Muchas veces nos dicen que las lentes son medios transparentes de algún material limitados por dos superficies o cosas así... y si, esas son lentes, pero, la definición de lente es un poco más corta, mas concreta y mas abstracta. Las lentes no son otra cosa que *sistemas de dioptras*, o sea, una composición de estas.

Al ser una composición de dioptras se absorben todas las características de las dioptras, o sea, una lente puede ser divergente o convergente según sea como este construida.

Tomemos un posible sistema de lentes, como el de la figura 36.

Tenemos dos dioptras distintas. La primera divide los medios de índices  $n$  y  $n''$  y la segunda divide los medios de índices  $n''$  y  $n'$ .

Las ecuaciones de las potencias son:

$$\phi_1 = \frac{n''}{S'_1} - \frac{n}{S_1} = \frac{n'' - n}{R_1} = \frac{-n}{f_1} = \frac{n''}{f'_1}$$

$$\phi_2 = \frac{n'}{S'_2} - \frac{n''}{S_2} = \frac{n' - n''}{R_2} = \frac{-n''}{f_2} = \frac{n'}{f'_2}$$

Además, podemos ver que la imagen del primer objeto ( $S'_1$ ) sera el objeto de la imagen  $S'_2$  que es la imagen final que buscamos. La pregunta es: ¿Cuál es en función de los datos la distancia  $S_2$ ?

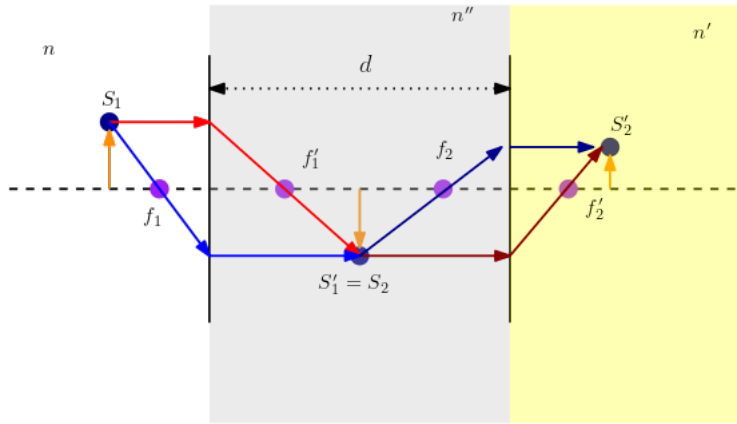


Figura 36: Esquema de un posible sistema de dioptras

No es difícil ver que  $|S_2| = |d - S'_1|$ , pero, en particular, respecto de la segunda dioptra, la luz viene de izquierda a derecha, por lo que, según la convención de signos se tiene

$$S_2 = d - S'_1$$

Reemplazando esta relación en la ecuación de  $\phi_2$  podemos obtener una ecuación para  $S'_2$ , que saldrá de

$$\frac{n'}{S'_2} - \frac{n''}{S'_1 - d} = \frac{n'}{f'_2}$$

Reemplazando y poniendo todo en cocientes de  $d/S'_1$  obtenemos

$$S'_2 = \frac{f'_2 \left(1 - \frac{d}{S'_1}\right)}{\frac{n''}{n'} \frac{f'_2}{S'_1} + \left(1 - \frac{d}{S'_1}\right)} \quad (62)$$

Esta es la ecuación para la imagen que produce un objeto para una lente cuyas dioptras distan  $d$  entre si.

Ahora, ¿Qué pasa si  $d$  es más chica que todas las demás distancias involucradas?

En este caso, el cual se denomina *lente delgada*, tenemos en particular que  $d \ll S'_1$ , y con esto podemos considerar la siguiente aproximación

$$1 - \frac{d}{S'_1} \sim 1$$

Además, con esta consideración vale que la distancia focal objeto  $f = f_1$  de toda lente delgada y la distancia focal imagen es tal que  $f' = f'_2$ . Con estas consideraciones podemos obtener la ecuación de la potencia de una lente delgada la cual es:

$$\phi_l = \frac{n'}{S'} - \frac{n}{S} = \frac{n_l - n}{R_1} + \frac{n' - n_l}{R_2} = \frac{n'}{f'} = \frac{-n}{f} \quad (63)$$

La ecuación 64 es la ecuación mas general para la lente delgada, donde  $n_l$  es el índice de refracción de la lente,  $n$  es el índice de refracción donde se encuentra el objeto,  $n'$  el índice de refracción de la superficie en contacto con la segunda dioptra y  $R_1$  y  $R_2$  son los radios de curvaturas de las dioptras 1 y 2 respectivamente.

Es de interés el caso de una *lente inmersa en medio único*, ejemplo, las lentes de los anteojos. Para este caso  $n = n'$ , por lo que, reemplazando en 64 tenemos que:

$$\phi_l = \frac{n}{S'} - \frac{n}{S} = \frac{n_l - n}{R_1} + \frac{n - n_l}{R_2} = \frac{n}{f'} = \frac{-n}{f} \quad (64)$$

### 5.1. Clasificación de lentes según su forma

Las lentes pueden clasificarse según como sea el sistema creado. En particular, lo importante es cual es el signo de los radios según el eje óptico, es decir, si la primer lente es cóncava y la segunda convexa, o al revés, etc.

En particular, las lentes se pueden ordenar como se muestra en la figura 37

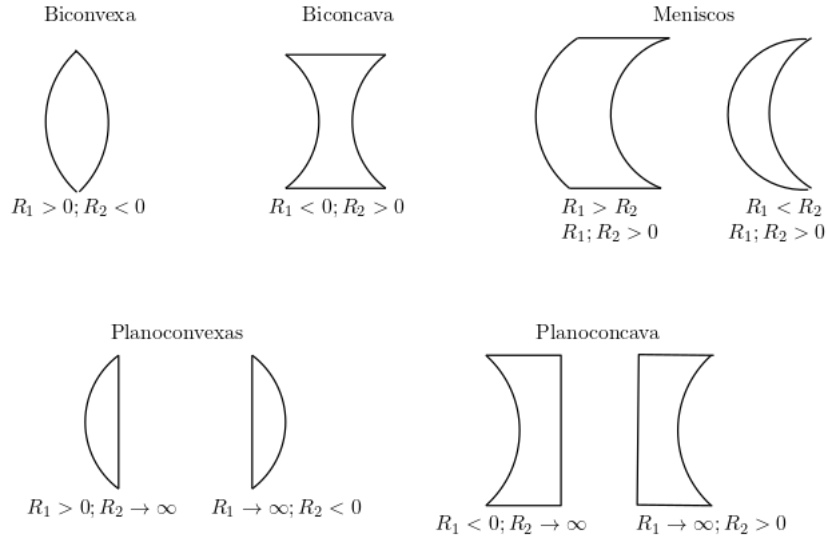


Figura 37: Tipos de Lentes

### 5.2. Desmintiendo Mitos

**¿Las formas descritas determinan si las lentes son Divergentes ( $\phi < 0$ ) o Convergentes ( $\phi > 0$ )?**

Veamos que esto no es así. Recordemos la ecuación de la potencia de una lente

$$\phi_l = \frac{n_l - n}{R_1} + \frac{n' - n_l}{R_2}$$

Supongamos que tenemos una lente Biconvexa, es decir, una lente tal que  $R_1 > 0$  y  $R_2 < 0$

Entonces, supongamos que  $n_l > n$  y  $n = n'$ , ejemplo  $n_l$ : Vidrio y  $n$ : Aire.

Entonces

$$\begin{cases} n_l - n > 0 & \Rightarrow \frac{n_l - n}{R_1} > 0 \\ n - n_l < 0 & \Rightarrow \frac{n - n_l}{R_2} > 0 \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$(> 0) + (> 0) = (> 0) \Rightarrow \phi > 0$$

En este caso, la dioptra biconvexa es positiva, o sea, la lente es *convergente*.

Ahora, supongamos que tenemos una burbuja de aire en agua (como las que se forman en la botella de agua mineral sin gas). Esta también es una lente biconvexa, pero en este caso  $n_l < n$  donde  $n_l$ : Aire y  $n = n'$ : Agua.

En este caso:

$$\begin{cases} n_l - n < 0 & \Rightarrow \frac{n_l - n}{R_1} < 0 \\ n - n_l > 0 & \Rightarrow \frac{n - n_l}{R_2} < 0 \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$(< 0) + (< 0) = (< 0) \Rightarrow \phi < 0$$

Por lo que en este caso la lente es *divergente*.

Pero, la forma de ambas lentes puestas a prueba eran iguales!. Esto nos garantiza el hecho de que **la forma de las lentes no determina si son o no Convergentes o Divergentes**.

### 5.3. Gráficos $S'$ Vs $S$

Cuando estudiamos dioptras, vimos que según la posición de  $S$  respecto de  $f$ , el comportamiento de las características de las imágenes son distintas.

¿Podemos resumir toda la información de todos los posibles casos en un solo gráfico? La respuesta es corta: Sí.

¿Qué ecuación nos conviene utilizar? Miremos la ecuación de la potencia de una lente delgada.

Podemos quedarnos con

$$\phi = \frac{n'}{S'} - \frac{n}{S} = \frac{-n}{f}$$

De acá podemos despejar  $S'$  en función de  $S$ , quedándonos

$$S'(S) = \frac{\left(\frac{n'}{n}\right) S f}{f - S}$$

Si realizamos el gráfico de esta Ecuación para  $n = 1$ ,  $n' = 1,3$  y  $f = -1$  obtenemos el gráfico de la figura 38 Notemos

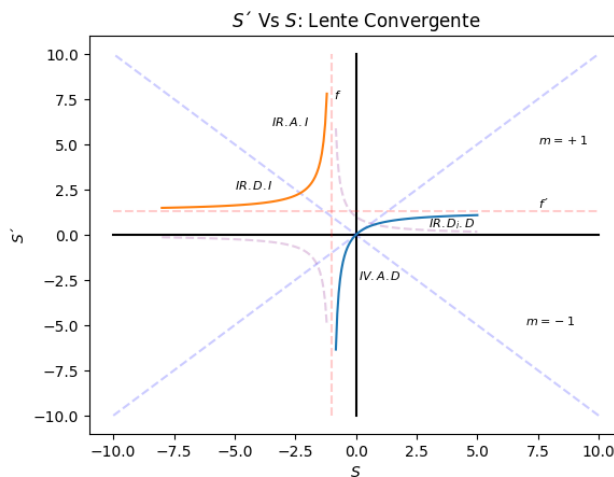


Figura 38: Gráfico de  $S'$  Vs  $S$  para una lente delgada convergente

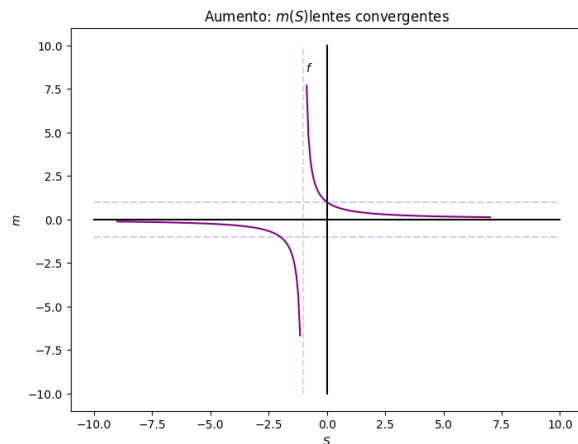


Figura 39: Aumento en función de  $S$  para el caso específico

que para los valores tomados para realizar el gráfico, se obtiene que  $\phi > 0$ , o sea, la lente es convergente. Por lo que, el gráfico de  $S'(S)$  nos dará las distintas situaciones posibles que puede tomar esta lente.

Recordemos un par de definiciones previas.

- Primero que nada, a  $S' > 0$  se le da el nombre de imagen real (IR), formada por la intersección de los rayos de luz transmitidos. Por otro lado, si  $S' < 0$  se le da el nombre de imagen virtual (IV), la cual es la formada por la intersección de las proyecciones de los rayos transmitidos.
- Por otro lado, la imagen puede ser directa (D) que nos indica que la imagen esta proyectada en en el mismo sentido respecto del eje óptico que el objeto o invertida (I) que es justo lo contrario a la directa (o sea, la imagen se forma dada vuelta). Esto me lo da el signo de  $m$ , si  $m > 0$  directa y si  $m < 0$  invertida
- La imagen puede ser aumentada  $|m| > 1$ , o sea, más grande que el objeto original o disminuida  $|m| < 1$ , o sea, más pequeña que la imagen original.

Segun lo que se aprecia en el grafico, podemos sintetizar todas las situaciones posibles en el Cuatro

Objeto	Ubicación	Imagen		
		Real/Virtual	Directa/Invertida	Aumentada/Disminuida
$-\infty < S < 2f$ : Real	$f' < S' < 2f'$	Real	Invertida	Disminuida
$2f < S < f$ : Real	$2f' < S' < \infty$	Real	Invertida	Aumentada
$f < S < 0$ : Real	$-\infty < S' < 0$	Virtual	Directa	Aumentada
$0 < S < \infty$ : Virtual	$0 < S' < f'$	Real	Directa	Disminuida

Tabla 1: Tabla de Objeto/Imagen para lente convergente

**Rompiendo mitos (1):** Es mentira que toda lente convergente siempre da imágenes reales. Viendo el gráfico de la figura 38, se puede ver que el brazo pegado a la ascintota producida por el foco produce imagenes virtuales, aumentadas y directas las cuales se corresponden al caso de una lupa.

Si hacemos lo mismo pero para una lente divergente, en este caso, una con iguales índices  $n = 1$  y  $n' = 1,3$  pero con foco objeto en  $f = 1$ , donde si calculamos el foco imagen nos queda en  $f' = -1,3$ , nos quedaria un grafico como el que sigue

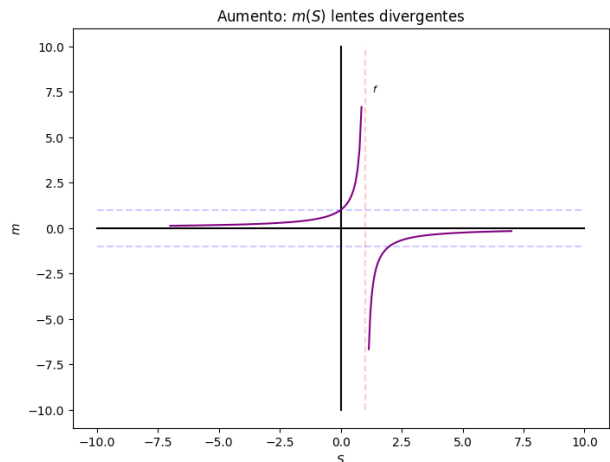
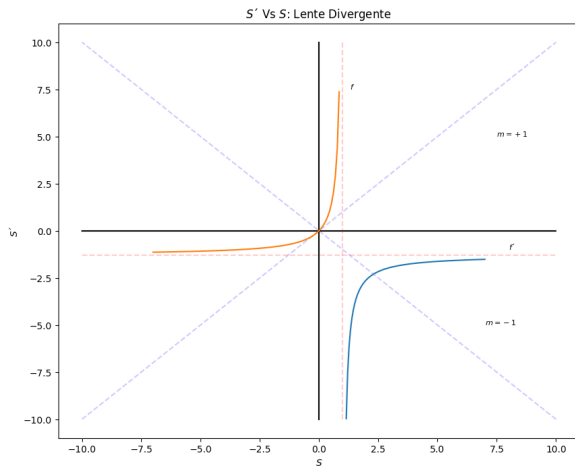


Figura 40: Gráfico de  $S'$  Vs  $S$  para una lente delgada convergente

Figura 41: Aumento en función de  $S$  para el caso específico

La tabla de posibilidades para el caso divergente nos queda

Objeto	Ubicación	Imagen		
		Real/Virtual	Directa/Invertida	Aumentada/Disminuida
$-\infty < S < 2f$ : Real	$f' < S' < 0$	Virtual	Directa	Disminuida
$0 < S < f$ : Virtual	$0 < S'$	Real	Directa	Aumentada
$f < S < 2f$ : Virtual	$S' < 2f'$	Virtual	Invertida	Aumentada
$2f < S < \infty$ : Virtual	$2f < S' < f'$	Virtual	Invertida	Disminuida

Tabla 2: Tabla de Objeto/Imagen para lente Divergente

**Rompiendo mitos (2):** A su vez, también es falso que toda lente divergente produce imágenes virtuales. Si realizamos un gráfico  $S'$  Vs  $S$ , para una lente divergente podemos observar que existe un brazo pegado a la asíntota del foco que tiene valores de  $S' > 0$ .